Neue Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen*).

Von

FRIEDRICH SCHUR in Dorpat.

Es sei mir gestattet, kurz diejenigen Punkte hervorzuheben, in welchen sich die folgende Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen von denjenigen unterscheidet, welche Herr Lie, der Schöpfer dieser neuen Disciplin, ihr unter Mitwirkung von Herrn Engel in dem vor Kurzem erschienenen ersten Abschnitte seiner umfangreichen Monographie**) gegeben hat. Eine, wie mir scheint, wesentliche Vereinfachung erziele ich dadurch, dass ich nur solche Gruppen betrachte, welche die identische Transformation enthalten. Dass hierin eine vielleicht ungerechtfertigte Beschränkung nicht liegt, beruht auf der schon von Herrn Lie bemerkten Thatsache, dass jede endliche Transformationsgruppe durch Einführung geeigneter Parameter in eine solche übergeführt werden kann, welche die identische Transformation enthält. Während aber Herr Lie dies mit dem ganzen Apparate seiner Theorie bewiesen hat, habe ich im letzten Paragraphen einen directen, nur den ursprünglichen analytischen Ausdruck der Gruppeneigenschaft benutzenden Beweis dafür gegeben. Ich hätte daher diesen Beweis ebenso gut an die Spitze meiner Abhandlung stellen können und habe dies nur desshalb nicht gethan, um mit concreteren Betrachtungen beginnen zu können.

Die Ableitung der grundlegenden Differentialgleichungen ist nunmehr eine directe Folgerung aus der Gruppeneigenschaft; während sich dieselben aber bei Herrn Lie zunächst nur als nothwendige Bedingungen ergeben, gelingt es mir durch eine nahe liegende Verallgemeinerung eines Verfahrens, welches ich in einer vor Kurzem ver-

*) Die vorliegende Abhandlung ist gesondert als *Gratulationsschrift der Universität Dorpat zum fünfzigjährigen Jubiläum der Sternwarte Pulkowa* erschienen.

**) Theorie der Transformationsgruppen. Erster Abschnitt. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel bearbeitet von Sophus Lie. Leipzig, Teubner 1888. Ich werde dieses Werk im Folgenden immer kurz als „Transf." citiren. Die in der Einleitung erwähnten Theoreme des Herrn Lie werden später noch genau citirt werden.

öffentlichten Abhandlung*) zur Ableitung der Haupteigenschaften der Parametergruppe angewendet habe, diese Differentialgleichungen zugleich als die hinreichenden Bedingungen für die Bestimmung einer Gruppe nachzuweisen. Die hierbei verwendeten Recursionsformeln liefern gleichzeitig die directe Lösung des Problems, die endlichen Gleichungen einer Gruppe aus den infinitesimalen Transformationen ihrer selbst sowohl wie ihrer Parametergruppe zu finden. Wenn hierbei etwas lange Formeln kaum zu vermeiden waren, so wird auf der andern Seite der Vortheil erreicht, dass keine besonderen Vorkenntnisse, z. B. nicht die Integration der vollständigen Systeme vorausgesetzt wird.

Indem ferner die bekannten Relationen zwischen den infinitesimalen Transformationen einer Gruppe direct als die vollständigen Integrabilitätsbedingungen jener grundlegenden Differentialgleichungen nachgewiesen werden, sind diese Relationen wiederum mit einem Schlage als die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür erwiesen, dass die betreffenden infinitesimalen Transformationen eine Gruppe bestimmen. Herr Lie erreicht dies dadurch, dass er von der Schaar der von diesen infinitesimalen Transformationen erzeugten eingliedrigen Gruppen ausgeht und beweist, dass dieselbe, falls jene Relationen bestehen, eine Gruppe bildet. Es hat dieser Beweis, weil er auf den Ideen beruht, welche bei Erfindung der Theorie leitend gewesen sind, sicher eine grosse Bedeutung, aber, von der grösseren Länge abgesehen, hat er gegenüber dem von mir gegebenen immerhin den Nachtheil, dass er eine gewisse Kenntniss der Zusammensetzung der Gruppen anticipirt.

Es werden zuletzt auch die Gleichungen, welche zwischen den charakteristischen Constanten einer Gruppe bestehen, als die vollständigen Integrabilitätsbedingungen der Differentialgleichungen, denen die Componenten ihrer infinitesimalen Transformationen zu genügen haben, wenigstens für den Fall nachgewiesen, dass es sich um transitive Gruppen handelt. An diesen Nachweis knüpft sich zugleich die vollständige Integration dieser Differentialgleichungen durch Potenzreihen, deren Glieder nach verhältnissmässig einfachen Gesetzen sich aus den charakteristischen Constanten aufbauen. Es ist hiermit das Problem gelöst, alle endlichen transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung zu bestimmen, und in diesem Punkte dürfte meine Abhandlung wesentlich über das bisher über diesen Gegenstand Veröffentlichte hinausgehen. Die explicite Darstellung einer Transformationsgruppe durch ihre charakteristischen Constanten setzt zugleich ihre blosse innere Abhängigkeit von diesen in unmittelbare Evidenz.

*) Schur, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen, Math. Ann. Bd. 33, S. 49ff.

Somit erledigt diese Darstellung zugleich die Frage nach der Aehnlichkeit transitiver Gruppen. Handelt es sich um die Parametergruppe, so sind diese Formeln von besonderer Einfachheit. Ich habe daher die Behandlung dieses Falles vorausgeschickt, zumal die von mir gegebene analytische Darstellung der Parametergruppe unmittelbar die Zusammensetzung jeder zugehörigen Transformationsgruppe aus eingliedrigen Gruppen erkennen lässt. Der beliebige Untergruppen behandelnde Paragraph enthält nichts Neues, musste aber der Vollständigkeit halber eingefügt werden. Es mag zuletzt noch bemerkt werden, dass für das Verständniss meiner Abhandlung keinerlei Vorkenntnisse aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen oder Transformationsgruppen erforderlich sind.

§ 1.

Zurückführung der Gruppeneigenschaft auf die grundlegenden Differentialgleichungen.

Ist in einem Gebiete von n Dimensionen eine Schaar von ∞^r Transformationen vorgelegt, von denen jede einem Punkte $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ einen Punkt $(x_1', x_2', \dots, x_n')$ zuordnet, so ist der allgemeinste analytische Ausdruck derselben:

$$(1) \qquad x_\mathfrak{a}' = f_\mathfrak{a}(x_1, x_2, \dots, x_n;\ u_1, u_2, \dots, u_r) = f_\mathfrak{a}(x;\ u).$$

Von den $f_\mathfrak{a}$ möge zunächst nur so viel bekannt sein, dass sie Potenzreihen der $x_\mathfrak{a}$ und der $u_\mathfrak{b}$ sind, welche in der Nähe der Stelle

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = u_1 = u_2 = \dots = u_r = 0$$

convergiren. Beschränken wir uns auf eine gehörige Nähe dieses Nullpunktes, so werden wir es im Folgenden zunächst immer mit Potenzreihen derselben Art zu thun haben.

Unter diesen Transformationen möge nun im Besonderen eine sein, welche jedem Punkte ihn selbst zuordnet, die sogenannte identische Transformation; wir werden später*) sehen, wie wir uns von dieser zunächst als speciell erscheinenden Annahme befreien können. Nehmen wir weiter an, dass diese Transformation dem Werthesysteme $u_\mathfrak{b} = 0$ der Parameter entspreche, so werden die $f_\mathfrak{a}$ die Form haben:

$$(2) \qquad f_\mathfrak{a}(x;\ u) = x_\mathfrak{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f_\mathfrak{a}(x;\ 0)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1} \partial u_{\mathfrak{b}_2} \cdots \partial u_{\mathfrak{b}_m}} u_{\mathfrak{b}_1} u_{\mathfrak{b}_2} \cdots u_{\mathfrak{b}_m}.$$

$$(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_m = 1, 2, \dots, r).$$

Soll unsre Schaar von Transformationen wirklich von r-facher Mächtigkeit sein, so muss es möglich sein, *um den Nullpunkt einen*

*) Vergl. § 7 dieser Abhandlung.

solchen endlichen Bereich abzugrenzen, dass zwei verschiedenen Werthsystemen der Parameter i. A. auch zwei verschiedene Transformationen entsprechen. Würden nämlich allen Stellen $(u_\mathfrak{a})$ eines Theiles desjenigen Gebietes, für welches $|u_\mathfrak{a}| < \delta$, Stellen $(v_\mathfrak{a})$ entsprechen, für welche ebenfalls $|v_\mathfrak{a}| < \delta$, δ mag so klein sein, wie man will, derart dass für alle $x_\mathfrak{a}$ die Gleichungen bestehen:

$$f_\mathfrak{a}(x; u) = f_\mathfrak{a}(x; v), \tag{3}$$

so würde für unendlich kleine δ hieraus folgen:

$$\sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} \frac{\partial f_\mathfrak{a}(x; u)}{\partial u_\mathfrak{b}} (v_\mathfrak{b} - u_\mathfrak{b}) = 0. \tag{4}$$

Es müssten daher die Functionen $\chi_\mathfrak{c}(u)$, welche die Coefficienten der Entwickelung der $f_\mathfrak{a}(x; u)$ nach den $x_\mathfrak{b}$ sind, sämmtlich Gleichungen von der Form:

$$\sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} \frac{\partial \chi_\mathfrak{c}(u)}{\partial u_\mathfrak{b}} w_\mathfrak{b} = 0 \tag{5}$$

genügen, sodass die Functionaldeterminante von je r dieser Functionen verschwinden würde. Es lassen sich demnach diese Functionen durch $r - 1$ derselben ausdrücken*), oder unsere Transformationen bilden eine Schaar von höchstens $(r-1)$-facher Mächtigkeit.

Die Gruppeneigenschaft unserer Transformationen spricht sich nun In dem Bestehen folgender Gleichungen aus:

$$f_\mathfrak{a}\big(f(x; u); v\big) = f_\mathfrak{a}\big(x; \varphi(u; v)\big). \tag{6}$$

in Rücksicht auf unsere letzte Bemerkung ergeben sich für die Functionen $\varphi_\mathfrak{a}(u; v)$ sofort folgende Gleichungen:

$$u_\mathfrak{b} = \varphi_\mathfrak{b}(u; 0) \tag{7}$$

und:

$$v_\mathfrak{b} = \varphi_\mathfrak{b}(0; v). \tag{8}$$

Aus (7) folgt, dass die Functionen $\varphi_\mathfrak{a}$ die folgende Form haben:

$$\varphi_\mathfrak{a}(u; v) = u_\mathfrak{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi_\mathfrak{a}(u, 0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1} \partial v_{\mathfrak{b}_2} \cdots \partial v_{\mathfrak{b}_m}} v_{\mathfrak{b}_1} v_{\mathfrak{b}_2} \cdots v_{\mathfrak{b}_m}; \tag{9}$$

$$\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \cdots, \mathfrak{b}_m = 1, 2, \cdots, r\}$$

von den hierdurch neu eingeführten Potenzreihen möge zunächst wieder nur bekannt sein, dass sie in gewisser Nähe des Nullpunktes convergiren.

---

*) S. etwa Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, 5. Aufl. Leipzig, Hirzel, 1881, S. 142 u. 143.

Aus (8) ergiebt sich weiter:

$$(10)\qquad \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}(0;\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}}} = \delta_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}},\text{*)}$$

wo $\delta_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = 1$ oder 0, je nachdem $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b}$, und:

$$(11)\qquad \frac{\partial^m \varphi_{\mathfrak{a}}(0,\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1} \partial v_{\mathfrak{b}_2} \cdots \partial v_{\mathfrak{b}_m}} = 0,$$

wenn $m > 1$.

Weiterhin folgt, dass auch die Gleichungen:

$$(12)\qquad u_{\mathfrak{a}}' = \varphi_{\mathfrak{a}}(u;\,v)$$

eine Gruppe bestimmen**) Nach (6) ist nämlich erstens:

$$(13)\qquad \begin{aligned} f_{\mathfrak{a}}\Big(f\big(f(x;\,u);\,v\big);\,w\Big) &= f_{\mathfrak{a}}\big(f(x;\,u);\,\varphi(v;\,w)\big) \\ &= f_{\mathfrak{a}}\Big(x;\,\varphi\big(u;\,\varphi(v;\,w)\big)\Big), \end{aligned}$$

und zweitens:

$$(14)\qquad \begin{aligned} f_{\mathfrak{a}}\Big(f\big(f(x;\,u);\,v\big):\,w\Big) &= f_{\mathfrak{a}}\Big(f\big(x;\,\varphi(u;\,v)\big);\,w\Big) \\ &= f_{\mathfrak{a}}\Big(x;\,\varphi\big(\varphi(u;\,v);\,w\big)\Big), \end{aligned}$$

also, sobald die u, v, w innerhalb des oben definirten Bereiches liegen:

$$(15)\qquad \varphi_{\mathfrak{a}}\big(\varphi(u;\,v);\,w\big) = \varphi_{\mathfrak{a}}\big(u;\,\varphi(v;\,w)\big);$$

hierbei kann man sowohl die $u_{\mathfrak{a}}$ als die zu transformirenden Grössen betrachten und die $v_{\mathfrak{a}}$ als die Parameter der Transformation als auch umgekehrt. Die durch die Gleichungen (12) und (15) dargestellte Gruppe wollen wir die *Parametergruppe* der gegebenen Gruppe nennen.

Entwickeln wir in Gleichung (6) auf beiden Seiten nach Potenzen von $v_{\mathfrak{b}}$ und vergleichen die Coefficienten, so ergeben sich die folgenden nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen der Gruppeneigenschaft:

$$(16)\qquad \frac{1}{m!}\,\frac{\partial^m f_{\mathfrak{a}}\big(f(x;\,u);\,0\big)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1} \partial v_{\mathfrak{b}_2} \cdots \partial v_{\mathfrak{b}_m}} =$$

$$\sum \frac{1}{p!}\,\frac{\partial^p f_{\mathfrak{a}}(x;\,u)}{\partial u_{\mathfrak{c}_1} \partial u_{\mathfrak{c}_2} \cdots \partial u_{\mathfrak{c}_p}} \Bigg[\frac{1}{s_1!} \cdot \frac{\partial^{s_1} \varphi_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_1}}(u;\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1} \partial v_{\mathfrak{b}_2} \cdots \partial v_{\mathfrak{b}_{s_1}}} \cdot \frac{1}{s_2!}\,\frac{\partial^{s_2} \varphi_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_2}}(u;\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{s_1+1}} \partial v_{\mathfrak{b}_{s_1+2}} \cdots \partial v_{\mathfrak{b}_{s_1+s_2}}} \cdots$$

$$\cdots \frac{1}{s_p!}\,\frac{\partial^{s_p} \varphi_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_p}}(u;\,0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{m-s_p}} \cdots \partial v_{\mathfrak{b}_m}}\Bigg].$$

$$\left\{\begin{matrix} p = 1, 2, \ldots, m;\ \ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_p = 1, 2, \ldots, r;\ \ \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots, \mathfrak{d}_p = 1, 2, \ldots, p; \\ s_1 + s_2 + \cdots + s_p = m \end{matrix}\right\}.$$

*) Vergl. Transf. Theorem 1, S. 18.

**) Vergl. Transf. Theorem 71, S. 404.

Diese unendlich vielen Bedingungen reduciren sich nun dadurch auf eine endliche Anzahl, dass *sie für jedes m erfüllt sind*, *sobald sie für $m=1$ befriedigt sind*, sobald also:

$$(17)\qquad \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}\big(f(x;u);0\big)}{\partial v_{\mathfrak{b}}} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x;u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\,\frac{\partial \varphi_{\mathfrak{c}}(u;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}}}.$$

Nehmen wir nämlich an, das System (16) sei für ein gewisses m und alle kleineren Zahlen erfüllt, so ergiebt sich durch Differentiation desselben nach $u_{\mathfrak{c}}$, Multiplication mit $\dfrac{\partial \varphi_{\mathfrak{c}}(u;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{m+1}}}$ und Summation über $\mathfrak{c}$ in Rücksicht auf (17):

$$(18)\qquad \sum_{\mathfrak{d}=1}^{n} \frac{1}{m!}\,\frac{\partial\left(\dfrac{\partial^m f_{\mathfrak{a}}\big(f(x;u);0\big)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}\partial v_{\mathfrak{b}_2}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_m}}\right)}{\partial f_{\mathfrak{d}}(x;u)}\,\frac{\partial f_{\mathfrak{d}}\big(f(x;u);0\big)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{m+1}}} =$$

$$= \sum \frac{1}{(p+1)!}\,\frac{\partial^{p+1} f_{\mathfrak{a}}(x;u)}{\partial u_{\mathfrak{c}_1}\partial u_{\mathfrak{c}_2}\cdots\partial u_{\mathfrak{c}_{p+1}}}\left[\frac{1}{s_1!}\,\frac{\partial^{s_1}\varphi_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_1}}(u;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}\partial v_{\mathfrak{b}_2}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_{s_1}}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\frac{1}{s_p!}\,\frac{\partial^{s_p}\varphi_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_p}}(u;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{m-s_p}}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_m}}\,\frac{\partial \varphi_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_{p+1}}}(u;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{m+1}}}\right] -$$

$$+ \sum \frac{1}{p!}\,\frac{\partial^{p} f_{\mathfrak{a}}(x;u)}{\partial u_{\mathfrak{c}_1}\partial u_{\mathfrak{c}_2}\cdots\partial u_{\mathfrak{c}_{p}}}\left[\frac{1}{s_1!}\,\frac{\partial^{s_1}\varphi_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_1}}(u;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}\partial v_{\mathfrak{b}_2}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_{s_1}}}\cdots\right.$$

$$\cdots\left\{\frac{1}{s_{\mathfrak{e}}!}\,\frac{\partial\left(\dfrac{\partial^{s_{\mathfrak{e}}}\varphi_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_{\mathfrak{e}}}}(u;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{s_1+s_2+\cdots+s_{\mathfrak{e}-1}+1}}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_{s_1+s_2+\cdots+s_{\mathfrak{e}}}}}\right)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\cdot\frac{\partial \varphi_{\mathfrak{c}}(u;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{m+1}}}\right\}\cdots$$

$$\left.\cdots\frac{1}{s_p!}\,\frac{\partial^{s_p}\varphi_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{d}_p}}(u;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{m-s_p}}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_m}}\right].$$

$$\left\{\begin{array}{c} p=1,2,\ldots,m;\ \mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2,\ldots,\mathfrak{c}_{p+1}=1,2,\ldots,r;\ \mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2,\ldots,\mathfrak{d}_p;\ \mathfrak{d}_{p+1}=1,2,\ldots,p;p+1 \\ s_1+s_2+\cdots+s_p=m;\ \mathfrak{e}=1,2,\ldots,p;\ \mathfrak{c}=1,2,\ldots,r. \end{array}\right\}.$$

Hier dürfte nur zu erörtern sein, warum in der ersten Summe rechts der Nenner $(p+1)!$ statt $p!$ gesetzt ist; dem würde in der That so sein, wenn wir nach der Rechenvorschrift dem letzten Factor den Index $\mathfrak{c}$ gegeben hätten. Durch die angewandte Bezeichnung tritt aber jedes Glied der Summe $(p+1)$-mal so oft auf, als dies eben nach jener Vorschrift der Fall sein durfte, sodass für ein bestimmtes p die betreffenden Glieder der Summe noch durch $p+1$ zu dividiren sind.

Aus (18) ergiebt sich für $u_{\mathfrak{a}}=0$ in Rücksicht auf die Gleichungen (10) und (11):

$$(19)\quad \sum_{\mathfrak{d}=1}^{n} \frac{1}{m!}\,\frac{\partial\left(\dfrac{\partial^m f_{\mathfrak{a}}(x;0)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}\partial u_{\mathfrak{b}_2}\cdots\partial u_{\mathfrak{b}_m}}\right)}{\partial x_{\mathfrak{d}}}\,\frac{\partial f_{\mathfrak{d}}(x;0)}{\partial u_{\mathfrak{b}_{m+1}}} = \frac{1}{(m+1)!}\,\frac{\partial^{m+1} f_{\mathfrak{a}}(x;0)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}\partial u_{\mathfrak{b}_2}\cdots\partial u_{\mathfrak{b}_{m+1}}}$$

$$+\sum \frac{1}{p!}\,\frac{\partial^p f_{\mathfrak{a}}(x;0)}{\partial u_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}}\partial u_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}}\cdots\partial u_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{p-1}}}\partial u_{\mathfrak{c}}}\,\frac{1}{(m-p+1)!}\,\frac{\partial\left(\dfrac{\partial^{m-p+1}\varphi_{\mathfrak{c}}(0;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_p}}\partial v_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{p+1}}}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}}}\right)}{\partial u_{\mathfrak{b}_{m+1}}}\,.$$

$$\{p=1,2,\ldots,m;\ \mathfrak{c}=1,2,\ldots,r;\ \mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2,\ldots,\mathfrak{c}_m=1,2,\ldots,m\}.$$

Setzt man hierin zunächst $f(x;u)$ für x, so erhält man eine neue Form der linken Seite von (18).

Alle unsre Formeln von (16) ab bleiben offenbar gültig, wenn man in ihnen f, x, u, v, n durch φ, u, v, w, r ersetzt*). Wir wollen von ihnen nur diejenigen anmerken, welche (17) und (19) analog sind, nämlich die Formeln:

$$(20)\qquad \frac{\partial\varphi_{\mathfrak{a}}(\varphi(u;v);0)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\frac{\partial\varphi_{\mathfrak{a}}(u;v)}{\partial v_{\mathfrak{c}}}\,\frac{\partial\varphi_{\mathfrak{c}}(u;0)}{\partial u_{\mathfrak{b}}}\,.$$

und:

$$(21)\quad \sum_{\mathfrak{d}=1}^{r} \frac{1}{m!}\,\frac{\partial\left(\dfrac{\partial^m \varphi_{\mathfrak{a}}(u;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}\partial v_{\mathfrak{b}_2}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_m}}\right)}{\partial u_{\mathfrak{d}}}\,\frac{\partial\varphi_{\mathfrak{d}}(u;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{m+1}}} = \frac{1}{(m+1)!}\,\frac{\partial^{m+1}\varphi_{\mathfrak{a}}(u;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}\partial v_{\mathfrak{b}_2}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_{m+1}}}$$

$$+\sum \frac{1}{p!}\,\frac{\partial^p \varphi_{\mathfrak{a}}(u;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}}\partial v_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}}\cdots\partial v_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{p-1}}}\partial v_{\mathfrak{c}}}\,\frac{1}{(m-p+1)!}\,\frac{\partial\left(\dfrac{\partial^{m-p+1}\varphi_{\mathfrak{c}}(0;0)}{\partial w_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_p}}\partial w_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{p+1}}}\cdots\partial w_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}}}\right)}{\partial v_{\mathfrak{b}_{m+1}}}$$

$$\{p=1,2,\ldots,m;\ \mathfrak{c}=1,2,\ldots,r;\ \mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2,\ldots,\mathfrak{c}_m=1,2,\ldots,m\}.$$

Setzt man hierin für m und p: s_t und q, so erhält man einen Ausdruck für die in geschweiften Klammern stehende Grösse in der rechten Seite von (18). Substituirt man diesen Ausdruck in (18), so liefert der erste Term derselben gerade diejenigen Glieder der Formel (16) für $m+1$, welche in der Summe der rechten Seite von (18) hierzu noch fehlen; die übrigen Terme liefern auf Grund der Formel (16)

*) Vergl. des Verf. o. a. Abhandlung, S. 52 u. 53.

für m und alle kleineren Zahlen gerade diejenige Summe, welche in der aus (19) folgenden neuen Form der linken Seite von (18) neben:

$$\frac{1}{(m+1)!}\frac{\partial^{m+1} f_a(f(x;u);0))}{\partial v_{b_1}\partial v_{b_2}\cdots\partial v_{b_{m+1}}}$$

noch steht. *Aus der Gültigkeit der Formel* (16) *für ein m und alle kleineren Zahlen folgt also diese selbe Formel für $m+1$.* Die vollständige Ausrechnung glaubten wir hierbei dem Leser überlassen zu dürfen.

Das Bestehen der Gleichungen (17) hat daher die Gleichungen (16) für jedes m und somit auch die für die Gruppeneigenschaft charakteristischen Gleichungen (6) zur Folge. Dies ist aber nur bewiesen unter Voraussetzung der Gleichungen (20), welche ihrerseits natürlich wieder die Gleichungen (15) zur Folge haben. Das Problem der Bestimmung einer Transformationsgruppe gestaltet sich also folgendermassen. Sind gegeben die Functionen:

$$\frac{\partial \varphi_a(u;0)}{\partial v_b}=\omega_a^b(u), \qquad (a, b = 1, 2, \ldots, r) \tag{22}$$

die sogenannten *Componenten der infinitesimalen Transformationen der Parametergruppe*, so erlauben die aus (20) folgenden Recursionsformeln (21) die Functionen $\varphi_a(u;v)$ nach Potenzen der v_b zu entwickeln, also die Parametergruppe zu bestimmen. Sind ferner gegeben die Functionen:

$$\frac{\partial f_a(x;0)}{\partial u_b}=\xi_a^b(x), \qquad \begin{pmatrix} a = 1, 2, \ldots, n \\ b = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix} \tag{23}$$

die *Componenten der infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppe*, so erlauben die aus (17) folgenden Recursionsformeln (19) mit Hülfe der nunmehr bekannten $\varphi_a(u;v)$ die $f_a(x;u)$ nach Potenzen der u_b zu entwickeln, also die gesuchte Gruppe zu bestimmen. Selbstverständlich bedarf in gegebenem Falle die Convergenz der betreffenden Reihen einer besonderen Untersuchung*). Wir erhalten also das Resultat:

Satz 1. *Soll die Schaar von Transformationen*

$$x_a' = f_a(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ u_1, u_2, \ldots, u_r)$$

eine Gruppe bilden, soll also sein

$$f_a\big(f(x;u);v\big) = f_a\big(x;\varphi(u;v)\big),$$

*) Vergl. § 4. Einleitung und Anmerkung auf S. 177.

so sind hierfür die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen die, dass die Functionen $f_a(x;u)$ *und* $\varphi_a(u;v)$ *den Differentialgleichungen genügen:*

$$\text{(I)} \qquad \omega_a^b\big(\varphi(u;v)\big) - \sum_{c=1}^{r} \frac{\partial \varphi_a(u;v)}{\partial v_c}\, \omega_c^b(v) = 0, \qquad (a, b = 1, 2, \ldots, r)$$

und:

$$\text{(II)} \qquad \xi_a^b\big(f(x;u)\big) - \sum_{c=1}^{r} \frac{\partial f_a(x;u)}{\partial u_c}\, \omega_c^b(u) = 0; \qquad \begin{pmatrix} a = 1, 2, \ldots, n \\ b = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}$$

und es ist die Gruppe durch die Functionen $\xi_a^b(x)$ *und* $\omega_a^b(u)$, *welche letzteren den Anfangsbedingungen:* $\omega_a^b(0) = 1$ *oder* 0, *je nachdem* $a = b$ *oder* $a \gtrless b$, *genügen, vollständig bestimmt.*)*

§ 2.

Integrabilitätsbedingungen der grundlegenden Differentialgleichungen.

Um das System (I) zu integriren setzten wir:

$$(25) \qquad \varphi_a(u;v) = u_a + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi_a(u;0)}{\partial v_{b_1} \partial v_{b_2} \cdots \partial v_{b_m}} v_{b_1} v_{b_2} \cdots v_{b_m}. \qquad \{b_1, b_2, \ldots, b_m = 1, 2, \ldots, r\}.$$

Wir werden so aus dem Systeme (I) zur Bestimmung der Coefficienten dieser Reihe Gleichungen erhalten, welche, wie wir bewiesen haben, den Recursionsformeln (21) äquivalent sind. Die Integrabilitätsbedingungen des Systems (I) werden daher ausdrücken müssen, dass diese Formeln einander nicht widersprechen, dass also die durch Vertauschung von b_{m+1} mit etwa b_m aus (21) entstehende Formel denselben Werth des rechts stehenden $(m+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten liefert. Wir erhalten so, wenn wir:

$$(26) \qquad c_{a,b}^c = \frac{\partial \omega_c^b(0)}{\partial u_a} - \frac{\partial \omega_c^a(0)}{\partial u_b}$$

setzen, für $m = 1$ die Bedingungen:

$$(27) \qquad \sum_{b=1}^{r} \left\{ \frac{\partial \omega_a^{b_1}(u)}{\partial u_b}\, \omega_b^{b_2}(u) - \frac{\partial \omega_a^{b_2}(u)}{\partial u_b}\, \omega_b^{b_1}(u) \right\} = \sum_{c=1}^{r} \omega_a^c(u)\, c_{b_2,b_1}^c,$$

*) Vergl. Transf. Theorem 3, p. 33, welches sich freilich mit unserem Satz nur theilweise deckt.

Es lässt sich nun zeigen, dass dies zugleich die vollständigen Integrabilitätsbedingungen des Systems (I) sind. Differentiiren wir nämlich dasselbe nach $v_{\mathfrak{d}}$, multipliciren mit $\omega_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(v)$ und summiren wir über $\mathfrak{d}$, so erhalten wir das System:

$$(28)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(\varphi(u;v))}{\partial \varphi_{\mathfrak{c}}(u;v)}\, \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}\big(\varphi(u;v)\big)$$

$$-\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{r}\left\{\frac{\partial^2 \varphi_{\mathfrak{a}}(u;v)}{\partial v_{\mathfrak{c}}\partial v_{\mathfrak{d}}}\, \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(v)\,\omega_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(v) + \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}(u;v)}{\partial v_{\mathfrak{c}}}\, \frac{\partial \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(v)}{\partial v_{\mathfrak{d}}}\, \omega_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(v)\right\} = 0,$$

welches das System (I) ersetzen kann. Denn bezeichnen wir die linke Seite von (I) mit $\varrho_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u;v)$, so hat das System (28) die Form:

$$\sum_{\mathfrak{d}=1}^{r} \frac{\partial \varrho_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u;v)}{\partial v_{\mathfrak{d}}}\, \omega_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(v) = 0;$$

weil die Determinante $|\omega_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(v)|$ nicht identisch verschwindet, so folgt hieraus, dass die $\varrho_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u;v)$ von den $v_{\mathfrak{c}}$ unabhängig sind. Da aber der Definition der $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ und den Anfangsbedingungen gemäss $\varrho_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u;0)$ für alle $u_{\mathfrak{c}}$ verschwindet, so folgt in der That aus dem System (28) das System (I). Es war daher auch berechtigt, die Doppelsumme des ersten Gliedes von (28) auf Grund von (I) durch eine einfache Summe zu ersetzen.

Aus (28) werden sich nunmehr durch Coefficientenvergleichung ebenfalls Gleichungen ergeben, die den Formeln (21) äquivalent sind. Hierbei ist aber folgendes zu bemerken. Nehmen wir an, die Formeln (21) seien für alle m von 1 bis l widerspruchslos erfüllt, so hat das zur Folge, dass im Systeme (I) alle Glieder l^{ter} und niederer Dimension in den $v_{\mathfrak{c}}$ fortfallen, während in (28) dann nur die Glieder $(l-1)^{\text{ter}}$ und niederer Dimension verschwinden; umgekehrt wird das Fortfallen dieser Glieder das Bestehen der Gleichungen (21) für alle m von 1 bis l zur Folge haben. Um aber auszudrücken, dass diese Gleichungen einander nicht widersprechen, brauchen wir nur die Bedingungen dafür aufzusuchen, dass die Glieder $(l-1)^{\text{ter}}$ und niederer Dimension auch in denjenigen Gleichungen fortfallen, die aus (28) entstehen, wenn man darin $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b}_1$ vertauscht und das Resultat von (28) subtrahirt. Wir erhalten so:

$$(29)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\left\{\frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(\varphi(u;v))}{\partial \varphi_{\mathfrak{c}}(u;v)}\, \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}\big(\varphi(u;v)\big) - \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(\varphi(u;v))}{\partial \varphi_{\mathfrak{c}}(u;v)}\, \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}\big(\varphi(u;v)\big)\right\}$$

$$-\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{r}\left\{\frac{\partial \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(v)}{\partial v_{\mathfrak{d}}}\, \omega_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(v) - \frac{\partial \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(v)}{\partial v_{\mathfrak{d}}}\, \omega_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}}(v)\right\}\frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}(u;v)}{\partial v_{\mathfrak{c}}} = 0.$$

Auf Grund von (27) gehen diese Gleichungen über in:

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} c_{\mathfrak{i},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}\, \varrho_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u;\, v) = 0.$$

Sind demnach die Formeln (21) für alle m von 1 bis l widerspruchslos erfüllt, so folgt hieraus, dass in den Gleichungen (29) alle Glieder l^{ter} und niederer Dimension in den $v_\mathfrak{c}$ herausfallen, es stehen daher die Gleichungen (21) auch für $m = l + 1$ mit einander nicht im Widerspruch und können dazu dienen, auch die $(l+2)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten zu bestimmen. Es haben also in der That die Gleichungen (27) alle aus den Formeln (21) sich ergebenden Integrabilitätsbedingungen des Systems (I) zur Folge.

Genau ebenso ergeben sich als die vollständigen Integrabilitätsbedingungen des Systems (II) die Gleichungen:

$$(30)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)}{\partial x_\mathfrak{c}}\, \xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(x) - \frac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(x)}{\partial x_\mathfrak{c}}\, \xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x) \right\} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x)\, c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}.$$

Es muss aber hier noch einer Beschränkung gedacht werden, der die $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ unterworfen sind, sollen anders die aus (I) und (II) sich ergebenden Transformationen wirklich von r Parametern abhängen. Es lässt sich nämlich dann leicht die Unmöglichkeit davon einsehen, dass zwischen den $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ Identitäten von der Form:

$$(31)\qquad \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} a_\mathfrak{b}\, \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x) = 0 \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen. Dies ist ja sicher nicht möglich, falls wir $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ durch $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ ersetzen, also dem $\mathfrak{a}$ alle Werthe von 1 bis r geben, weil die Determinante $|\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)|$ nicht identisch verschwindet. Setzen wir daher:

$$(32)\qquad \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} a_\mathfrak{b}\, \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u) = \sigma_{\mathfrak{a}}(u),$$

so würde, falls wirklich die Identitäten (31) beständen, aus (II) folgen, dass auch:

$$(33)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x;\, u)}{\partial u_\mathfrak{c}}\, \sigma_{\mathfrak{c}}(u) = 0.$$

Aus diesen den Gleichungen (4) ähnlichen Gleichungen würde aber wie dort folgen, dass die $f_\mathfrak{a}(x;\, u)$ von weniger als r Parametern abhängen.

Umgekehrt, wenn dies der Fall, müssen immer Identitäten von der Form (31) bestehen. Würden nämlich die durch die Systeme (I) und (II) bestimmten Functionen $f_\mathfrak{a}(x; u)$ von weniger als r Parametern abhängen, so würde es unter den a. a. O. erwähnten Functionen $\chi_\mathfrak{c}(u)$ etwa $m < r$ von einander unabhängige, $\chi_1(u), \chi_2(u), \ldots, \chi_m(u)$, geben, sodass nicht alle m-gliedrigen Determinanten der Matrix:

$$\left\| \frac{\partial \chi_\mathfrak{c}(u)}{\partial u_\mathfrak{b}} \right\| \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, r \\ \mathfrak{c} = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

identisch verschwinden, wohl aber alle $(m+1)$-gliedrigen Determinanten der Matrix:

$$\left\| \frac{\partial \chi_\mathfrak{c}(u)}{\partial u_\mathfrak{b}} \right\| \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, r \\ \mathfrak{c} = 1, 2, \ldots, m, m+1 \end{pmatrix},$$

wenn $\chi_{m+1}(u)$ eine ganz beliebige der übrigen Functionen $\chi_\mathfrak{c}(u)$. Setzen wir daher:

$$\frac{\partial \chi_\mathfrak{c}(0)}{\partial u_\mathfrak{b}} = e_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}, \tag{34}$$

so wird es auch unter diesen Grössen $l \cdot r$ $(l \leqq m)$ solche geben, dass nicht alle l-gliedrigen Determinanten der Matrix:

$$\| e_\mathfrak{c}^\mathfrak{b} \| \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_l \\ \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, \mathfrak{a}_r \end{pmatrix}$$

verschwinden, wohl aber alle $(l+1)$-gliedrigen Determinanten der Matrix:

$$\| e_\mathfrak{c}^\mathfrak{b} \| \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{l+1} \\ \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}.$$

Wir werden daher $r(r-l)$ solche Grössen $d_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}$ wählen können, dass die Determinante:

$$\begin{vmatrix} e_{\mathfrak{a}_1}^1, & e_{\mathfrak{a}_2}^1, & \ldots, & e_{\mathfrak{a}_l}^1, & d_1{}^1, & \ldots, & d_{r-l}^1 \\ e_{\mathfrak{a}_1}^2, & e_{\mathfrak{a}_2}^2, & \ldots, & e_{\mathfrak{a}_l}^2, & d_1{}^2, & \ldots, & d_{r-l}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{\mathfrak{a}_1}^r, & e_{\mathfrak{a}_2}^r, & \ldots, & e_{\mathfrak{a}_l}^r, & d_1{}^r, & \ldots, & d_{r-l}^r \end{vmatrix} \tag{35}$$

nicht verschwindet. Bezeichnen wir dann mit $a_\mathfrak{b}$ die ersten Unterdeterminanten derselben nach den Gliedern der letzten Verticalreihe, so ist evident, dass diese die Gleichungen (31) befriedigen. Wissen wir also, dass solche Identitäten nicht bestehen können, so sind die durch die Systeme (I) und (II) bestimmten Functionen $f_\mathfrak{a}(x; u)$ wirklich von r Parametern abhängig.

Wir erhalten so den folgenden Satz:

Satz 2. *Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Componenten der infinitesimalen Transformationen*

$\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ *und* $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ *auf Grund der Systeme* (I) *und* (II) *eine r-gliedrige Gruppe von Transformationen bestimmen, sind die, dass:*

$$\text{(III)} \qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \left\{ \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}} \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(u) - \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}} \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u) - \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u)\, c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}} \right\} = 0$$

und:

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{\mathfrak{i}=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{i}}} \xi_{\mathfrak{i}}^{\mathfrak{b}_1}(x) - \frac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(x)}{\partial x_{\mathfrak{i}}} \xi_{\mathfrak{i}}^{\mathfrak{b}}(x) \right\} - \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x)\, c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}} = 0, {}^{*)}$$

wo:

$$\text{(V)} \qquad c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}} = \frac{\partial \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(0)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}} - \frac{\partial \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(0)}{\partial u_{\mathfrak{b}}},$$

ferner $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} = 1$ *oder* 0, *je nachdem* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ *oder* $\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b}$, *und wo die* $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ *keine Identitäten von der Form:*

$$\text{(VI)} \qquad \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} a_{\mathfrak{b}}\, \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x) = 0^{**)} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n)$$

befriedigen dürfen.

§ 3.

Bestimmung der Componenten der infinitesimalen Transformationen der Parametergruppe.

Wenn wir jetzt dazu übergehen, das System (III) zu integriren, so setzen wir natürlich die Constanten $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}$ als gegeben voraus; dieselben müssen dann zunächst den Bedingungen genügen:

$$(36) \qquad c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}} = - c_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}.$$

Unsern Voraussetzungen gemäss werden wir nun ansetzen müssen:

$$(37) \qquad \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} A_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2\cdots\mathfrak{c}_m}^{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{c}_1} u_{\mathfrak{c}_2} \ldots u_{\mathfrak{c}_m},$$

$$\{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_m = 1, 2, \ldots, r\}$$

wo $\delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = 1$ oder 0, je nachdem $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b}$. Hiernach ergiebt sich aus (III) für $u = 0$:

$$(38) \qquad c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} = A_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}} - A_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}},$$

---

*) Vergl. Transf. Theorem 24, p. 158.

**) Vergl. Transf. Theorem 8, p. 65.

welche Gleichungen wegen (36) widerspruchslos sind; sie erlauben offenbar von der r^3 Grössen $A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}$ durch die $\left(\frac{1}{2}r(r-1)+r\right)r$ Grössen $A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}$, wo $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{b}_1$, und die $c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}$ die übrigen auszudrücken.

Setzen wir nun überhaupt die Reihen (37) in das System (III) ein, so ergeben sich durch Coefficientenvergleichung folgende Beziehungen:

$$(39)\qquad A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} - A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}} A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\cdots\mathfrak{b}_m}$$

$$-\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{1}{(m-p-1)!\,p!} \left\{A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}} A^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}} \right.$$

$$\left. - A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}} A^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}}\right\}.$$

$$\{p = 1, 2, \ldots, m-1;\ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_{m-1} = 2, 3, \ldots, m\}$$

Hiernach ergeben sich z. B. für die drei Differenzen:

$$A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} - A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m}, \qquad A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} - A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\cdots\mathfrak{b}_m},$$
$$A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3\cdots\mathfrak{b}_m} - A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m}$$

Ausdrücke durch die $c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}$ und die Coefficienten niederer Ordnung der $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$, welche gestatten durch diese Grössen und einen der in diesen Differenzen enthaltenen Coefficienten die beiden andern auszudrücken. Es wird aber nun darauf ankommen, die Bedingungen dafür aufzustellen, dass jene drei Ausdrücke nicht mit einander im Widerspruche stehen, d. h. dass auch die Summe der rechten Seiten derselben verschwindet.

Für $m = 2$ sind diese Bedingungen leicht zu finden; dann geht nämlich (39) über in:

$$(40)\quad A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2} - A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \left\{c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}} A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_2} - A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} A^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2} + A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}} A^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_2}\right\}.$$

Vertauscht man hierin $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ cyklisch mit einander und addirt die drei so entstehenden Gleichungen zu einander, so ergiebt sich in Rücksicht auf (38):

$$(41)\qquad 0 = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \left\{c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{c}} + c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_1} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} + c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_2} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}}\right\}.$$

Diese Bedingungen sind nun aber auch hinreichend, um das Bestehen der analogen Identitäten für jedes m zur Folge zu haben.

Um dies zu beweisen, formen wir das System (III) in ein anderes um, welches dasselbe ersetzen kann. Wir differentiiren (III) nach $u_{\mathfrak{d}}$, multipliciren mit $\omega^{\mathfrak{b}_2}_{\mathfrak{d}}(u)$ und summiren über $\mathfrak{d}$; dann erhalten wir:

$$(42)\qquad \sum_{\mathfrak c,\mathfrak d=1}^{r}\left\{\frac{\partial^2\omega_{\mathfrak a}^{\mathfrak b}(u)}{\partial u_{\mathfrak c}\,\partial u_{\mathfrak d}}\,\omega_{\mathfrak c}^{\mathfrak b_1}(u)\,\omega_{\mathfrak d}^{\mathfrak b_2}(u)-\frac{\partial^2\omega_{\mathfrak a}^{\mathfrak b_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak c}\,\partial u_{\mathfrak d}}\,\omega_{\mathfrak c}^{\mathfrak b}(u)\,\omega_{\mathfrak d}^{\mathfrak b_2}(u)\right\}$$

$$+\sum_{\mathfrak c,\mathfrak d=1}^{r}\left\{\frac{\partial\omega_{\mathfrak a}^{\mathfrak b}(u)}{\partial u_{\mathfrak c}}\,\frac{\partial\omega_{\mathfrak c}^{\mathfrak b_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak d}}\,\omega_{\mathfrak d}^{\mathfrak b_2}(u)-\frac{\partial\omega_{\mathfrak a}^{\mathfrak b_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak c}}\,\frac{\partial\omega_{\mathfrak c}^{\mathfrak b}(u)}{\partial u_{\mathfrak d}}\,\omega_{\mathfrak d}^{\mathfrak b_2}(u)-\frac{\partial\omega_{\mathfrak a}^{\mathfrak c}(u)}{\partial u_{\mathfrak d}}\,\omega_{\mathfrak d}^{\mathfrak b_2}(u)\,c^{\mathfrak c}_{\mathfrak b_1,\mathfrak b}\right\}=0.$$

Zunächst ist leicht zu sehen, dass das System (42) das System (III) ersetzen kann. Denn bezeichnet man die linke Seite des letzteren mit $\tau^{\mathfrak a}_{\mathfrak b\,\mathfrak b_1}(u)$, so können wir (42) auch so schreiben:

$$(43)\qquad \sum_{\mathfrak d=1}^{r}\frac{\partial\tau^{\mathfrak a}_{\mathfrak b,\mathfrak b_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak d}}\,\omega_{\mathfrak d}^{\mathfrak b_2}(u)=0.$$

Giebt man hierin dem $\mathfrak b_2$ alle Werthe von 1 bis r, während man $\mathfrak b$ und $\mathfrak b_1$ festhält, so erhält man ein System von r homogenen linearen Gleichungen für die r Unbekannten $\frac{\partial\tau^{\mathfrak a}_{\mathfrak b,\mathfrak b_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak d}}$, dessen Determinante $\omega_{\mathfrak d}^{\mathfrak b_2}(u)$ nach Voraussetzung nicht identisch verschwindet, sodass die $\tau^{\mathfrak a}_{\mathfrak b,\mathfrak b_1}(u)$ von den $u_{\mathfrak c}$ unabhängig sein müssen. Setzen wir also voraus, dass die Coefficienten der linearen Glieder in den $\omega_{\mathfrak a}^{\mathfrak b}(u)$ bereits den Bedingungen (38) gemäss gewählt sind, so folgt aus $\tau^{\mathfrak a}_{\mathfrak b,\mathfrak b_1}(0)=0$, dass in der That das System (42) das System (III) ersetzen kann.

Hier greift nun wieder die Bemerkung Platz, dass das Bestehen der Gleichungen (39) für alle m von 1 bis l zur Folge hat, dass in den $\tau^{\mathfrak a}_{\mathfrak b,\mathfrak b_1}(u)$ alle Glieder $(l-1)^{\text{ter}}$ und niederer Dimension fortfallen, während dadurch nur die Glieder $(l-2)^{\text{ter}}$ und niederer Dimension in der linken Seite von (42) zum Verschwinden gebracht werden; umgekehrt hat das Verschwinden der letzteren das Bestehen der Gleichungen (39) für alle m von 1 bis l zur Folge. Wollen wir daher zum Ausdruck bringen, dass die Gleichungen (39) für $m=l+1$ einander nicht widersprechen, so haben wir die Bedingungen dafür aufzustellen, dass die Glieder $(l-1)^{\text{ter}}$ und niederer Dimension in denjenigen Gleichungen fortfallen, die aus (42) entstehen, wenn man in ihnen $\mathfrak b,\mathfrak b_1,\mathfrak b_2$ cyklisch vertauscht und die Resultate zu (42) addirt. Wir erhalten so aus (42) auf Grund von (41):

$$(44)\qquad \sum_{\mathfrak c=1}^{r}\left\{\frac{\partial\omega_{\mathfrak a}^{\mathfrak b}(u)}{\partial u_{\mathfrak c}}\,\tau^{\mathfrak c}_{\mathfrak b_1,\mathfrak b_2}(u)+c^{\mathfrak c}_{\mathfrak b_1,\mathfrak b_2}\,\tau^{\mathfrak a}_{\mathfrak b,\mathfrak c}(u)\right\}=0.$$

Hieraus geht hervor, dass das Bestehen der Gleichungen (39) für alle m von 1 bis l das Verschwinden aller Glieder $(l-1)^{\text{ter}}$ und niederer Dimension aus diesen Bedingungsgleichungen zur Folge hat, sodass die Gleichungen (39) einander auch für $m=l+1$ nicht widersprechen, die Grössen $A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_{l+1}}$ also ihnen entsprechend gewählt werden können. Hierdurch ist bewiesen, dass *die Gleichungen* (41) *die vollständigen Integrabilitätsbedingungen des Systems* (III) *bilden.*

Ehe wir nun dazu übergehen, die der Natur der Sache nach noch unbestimmten Coefficienten in den Entwickelungen für die $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ durch geeignete Festsetzungen zu bestimmen, müssen wir eine wichtige Bemerkung machen über die Ableitung aller Lösungssysteme von (III) aus einem derselben. Führen wir in die Parametergruppe $u'_{\mathfrak{a}} = \varphi_{\mathfrak{a}}(u;v)$ neue Veränderliche mit Hülfe der Gleichungen:

$$s_{\mathfrak{a}} = g_{\mathfrak{a}}(u); \quad u_{\mathfrak{a}} = G_{\mathfrak{a}}(s) \tag{45}$$

ein, wo $g_{\mathfrak{a}}(0) = 0$ und $\frac{\partial g_{\mathfrak{a}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ sein mag, so geht dieselbe über in:

$$s'_{\mathfrak{a}} = g_{\mathfrak{a}}\Big(\varphi\big(G(s);\ G(t)\big)\Big) = \psi_{\mathfrak{a}}(s;\ t), \tag{46}$$

es wird also:

$$\vartheta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(s) = \frac{\partial \psi_{\mathfrak{a}}(s;\,0)}{\partial t_{\mathfrak{b}}} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial g_{\mathfrak{a}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\, \omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{c}}(u), \tag{47}$$

und:

$$\frac{\partial \vartheta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(0)}{\partial s_{\mathfrak{b}}} - \frac{\partial \vartheta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(0)}{\partial s_{\mathfrak{b}}} = c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}; \tag{48}$$

es sind also, wenn die $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ Lösungen des Systems (III) sind, auch die Functionen $\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial g_{\mathfrak{a}}(G(s))}{\partial G_{\mathfrak{c}}(s)}\, \omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{c}}\big(G(s)\big)$ Lösungen desselben, wovon man sich auch leicht direct und unabhängig von der Definition dieser Functionen als Componenten infinitesimaler Transformationen einer Parametergruppe überzeugen kann. Man sieht aber auch umgekehrt, dass, sobald irgend ein Lösungssystem $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ von (III) gefunden ist, jedes andere $\vartheta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(s)$ auf die obige Art aus ihm abgeleitet werden kann. Wir brauchen, um dies einzusehen, nur zu beweisen, dass die Integrabilitätsbedingungen des Systems (47) für die Functionen $g_{\mathfrak{a}}(u)$ unter den gemachten Voraussetzungen erfüllt sind. Dieser Beweis kann genau so geführt werden wie bei den Systemen (I) und (III); die Integrabilitätsbedingungen bestehen eben hier darin, dass die $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ und $\vartheta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(s)$ je Lösungssysteme des Systems (III) sind. Es dürfte überflüssig sein, dies zum dritten Male auszuführen. Ebensowenig brauchen wir besonders zu beweisen, dass die $g_{\mathfrak{a}}(u)$ den Gleichungen (47) gemäss nunmehr als Potenzreihen, die in der Nähe des Nullpunktes convergiren, bestimmt werden können, falls die $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ und $\vartheta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(s)$ als solche Potenzreihen gegeben sind. Es genügt darauf hinzuweisen, dass die Gleichungen (47) auf die Form:

$$(49)\qquad \frac{\partial g_{\mathfrak{a}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} \vartheta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(s)\, \alpha_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u),$$

gebracht werden können, wo auch die $\alpha_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)$ Potenzreihen sind, die in der Nähe des Nullpunktes convergiren, und dass daher auf Grund dieser Gleichungen jeder Coefficient von $g_{\mathfrak{a}}(u)$ als ganze, ganzzahlige Function der Coefficienten niederer Dimension und der Coefficienten der $\vartheta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(s)$ und der $\alpha_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)$ ausgedrückt werden kann.*)

Hierdurch ist also bewiesen, dass es genügt, irgend ein Lösungssystem des Systems (III) aufzustellen. Wir finden ein solches, wenn wir den Formeln (39) die folgenden Bedingungen hinzufügen:

$$(50)\quad A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} + A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\cdots\mathfrak{b}_m\mathfrak{b}} + A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4\cdots\mathfrak{b}_m\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1} + \cdots + A_{\mathfrak{b}_m,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\cdots\mathfrak{b}_{m-1}} = 0.$$

In der That sind ja durch die Formeln (39) von den $m+1$ Gliedern dieser Summe m etwa durch das erste bestimmt, sodass das Hinzutreten der Bedingung (50) genügen würde, um diese $m+1$ Coefficienten durch die niederer Ordnung ausdrücken zu können. Es frägt sich nur, ob wir hierdurch convergente Reihen für die $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ erhalten. Um dies einzusehen, müssen wir genauer auf die Bestimmung der Coefficienten eingehen.

Vertauscht man in (39) $\mathfrak{b}_1$ der Reihe nach mit $\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \ldots, \mathfrak{b}_m$ und addirt die so entstehenden Gleichungen zu (39), so folgt auf Grund von (50):

$$(51)\qquad (m+1)\, A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{1}{(m-1)!}\, c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1},\mathfrak{b}}\, A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_3}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}}$$

$$\{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_m = 1, 2, \ldots, m\}$$

$$-\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{1}{(m-p)!\, p!}\, A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}}\, A^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p+1}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}}.$$

$$\left\{\begin{array}{c} p = 1, 2, \ldots, m-1; \\ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_m = 1, 2, \ldots, m \end{array}\right\}$$

Nun ergiebt sich zunächst aus (38) in Rücksicht auf (50) für $m = 1$:

$$(52)\qquad A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} = \frac{1}{2}\, c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}.$$

Ferner folgt aus (51) für $m = 2$:

$$(53)\qquad A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2} = \frac{1}{12}\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\left\{c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}\, c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{c}} + c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}}\, c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}}\right\}.$$

---

*) Vergl. S. v. Kowalevsky, zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Journ. f. r. u. a. M. Bd. 80, S. 1 ff. und etwa Biermann, Theorie der analytischen Functionen, Leipzig, Teubner 1887, S. 244 ff.

Allgemein ergiebt sich:

$$(54)\qquad A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} = \lambda_m \sum_{\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2,\ldots,\mathfrak{d}_{m-1}=1}^{r} c^{\mathfrak{d}_1}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}} \cdot c^{\mathfrak{d}_2}_{\mathfrak{d}_1,\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}} \cdots c^{\mathfrak{d}_{m-1}}_{\mathfrak{d}_{m-2},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}} \cdot c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{d}_{m-1},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}},$$

$$\{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_m = 1, 2, \ldots, m\}$$

wo die λ_m gewisse rationale Zahlen. Nehmen wir in der That an, diese Formel sei richtig für $m = 1, 2, \ldots, l-1$, so werden wir zeigen, dass sich λ_m immer so bestimmen lässt, dass sie auch für $m = l$ erfüllt ist. Es würde dann nämlich sein:

$$(55)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{1}{(l-p)!} \cdot \frac{1}{p!}\, A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{l-p}}}\, A^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{l-p+1}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_l}} =$$

$$\{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_l = 1, 2, \ldots, l\}$$

$$= \lambda_{l-p}\,\lambda_p \sum_{\mathfrak{d}_1,\mathfrak{d}_2,\ldots,\mathfrak{d}_{p-1},\mathfrak{c},\mathfrak{e}_1,\ldots,\mathfrak{e}_{l-p-1}=1}^{r} c^{\mathfrak{d}_1}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}} c^{\mathfrak{d}_2}_{\mathfrak{d}_1,\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}} \cdots c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{d}_{p-1},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_p}}\, c^{\mathfrak{e}_1}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{p+1}}}\, c^{\mathfrak{e}_2}_{\mathfrak{e}_1,\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{p+2}}} \cdots c^{\mathfrak{e}_{l-p-1}}_{\mathfrak{e}_{l-p-2},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{l-1}}} \cdot c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{e}_{l-p-1},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_l}}.$$

$$\{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_l = 1, 2, \ldots, l\}$$

Bedenken wir nun, dass $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, und dass in Folge dessen die Summe der Ausdrücke rechts für $p = 1$ und $l-1$ gleich wird der auf der rechten Seite von (51) stehenden ersten Summe, so folgt aus (51), dass Formel (54) auch für $m = l$ erfüllt ist, wenn wir setzen:

$$(56)\qquad (l+1)\,\lambda_l = -(\lambda_2\lambda_{l-2} + \lambda_3\lambda_{l-3} + \cdots + \lambda_{l-2}\lambda_2).$$

Dies würde nur für $l = 3$ nicht richtig sein, weil dann $l - 2 = 1$, vielmehr ist $\lambda_3 = 0$, und es verschwindet daher λ_l immer, sobald l eine ungerade Zahl. Wir erhalten daher zur Berechnung der λ_{2q} die Recursionsformel:

$$(57)\qquad (2q+1)\,\lambda_{2q} = -(\lambda_2\lambda_{2q-2} + \lambda_4\lambda_{2q-4} + \cdots + \lambda_{2q-2}\lambda_2).$$

Da nach (53) $\lambda_2 = \frac{1}{12}$, so finden wir so: $\lambda_4 = -\frac{1}{720}$, $\lambda_6 = \frac{1}{30240}$, u. s. w. Es scheint kein einfaches Gesetz zu sein, nach dem die λ_{2q} fortschreiten, jedenfalls aber sehen wir so viel, dass:

$$(58)\qquad |\lambda_{2q}| < \lambda_2^q;$$

denn nehmen wir an, diese Formel sei für $q = 1, 2, \ldots, m-1$ richtig, so folgt aus (57), dass:

$$(59)\qquad (2m+1)\,|\lambda_{2m}| \leqq (m-1)\,\lambda_2^m,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Nunmehr ist die Convergenz der für die $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ aufgestellten Reihen leicht zu beweisen. Liegen nämlich alle $|c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}|$ unterhalb der positiven Grösse g, so folgt aus (37), (54) und (58), dass:

$$(60)\qquad |\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)| \leq 1 + g\sum_{m=1}^{\infty}(gr)^{m-1}|u_{\mathfrak{b}_1}|\,|u_{\mathfrak{b}_2}|\cdots|u_{\mathfrak{b}_m}|$$

$$\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_m = 1, 2, \ldots, r\}$$

$$= 1 + \frac{1}{r}\sum_{m=1}^{\infty}(gr)^m(|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_r|)^m;$$

demnach convergirt die Reihe (38) sicher, so lange:

$$(61)\qquad |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_r| < \frac{1}{rg}.$$

Wir können jetzt das folgende Resultat aussprechen:

Satz 3. *Sobald die Grössen* $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}$ *die Bedingungen:*

$$(\mathrm{VII})\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\left\{c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{c}}\,c_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}} + c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2}^{\mathfrak{c}}\,c_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}} + c_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}\,c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}}\right\} = 0$$

erfüllen, lassen sich in der Nähe des Nullpunktes convergente Potenzreihen $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ *aufstellen*), welche die Differentialgleichungen* (III) *befriedigen, und zwar kann jedes Lösungssystem* $\vartheta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(s)$ *aus einer canonischen Form* $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ *desselben dadurch abgeleitet werden, dass man setzt:*

$$\vartheta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(s) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\frac{\partial g_{\mathfrak{a}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\,\omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u),$$

wo die $s_{\mathfrak{a}} = g_{\mathfrak{a}}(u)$ *solche in der Nähe des Nullpunktes convergente Potenzreihen, dass* $g_{\mathfrak{a}}(0) = 0$ *und* $\frac{\partial g_{\mathfrak{a}}(0)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$. *Die Reihen für die canonische Form sind:*

$$(\mathrm{VIII})\qquad \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_m}{m!}\,c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}}^{\mathfrak{d}_1}\,c_{\mathfrak{d}_1,\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}}^{\mathfrak{d}_2}\cdots c_{\mathfrak{d}_{m-2},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}}^{\mathfrak{d}_{m-1}}\,c_{\mathfrak{d}_{m-1},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}}^{\mathfrak{a}}\,u_{\mathfrak{b}_1}u_{\mathfrak{b}_2}\cdots u_{\mathfrak{b}_m},$$

$$\left\{\begin{matrix}\mathfrak{d}_1; \mathfrak{d}_2; \ldots; \mathfrak{d}_{m-1} = 1, 2, \ldots, r;\ \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_m = 1, 2, \ldots, r\\ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_m = 1, 2, \ldots, m\end{matrix}\right\}$$

wo:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2},\quad \lambda_2 = \frac{1}{12},\quad \lambda_{2q+1} = 0$$

und:

$$(2q+1)\,\lambda_{2q} = -(\lambda_2\lambda_{2q-2} + \lambda_4\lambda_{2q-4} + \cdots + \lambda_{2q-2}\lambda_2).$$

Die Gleichungen (VII) *sind zugleich die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für Integrabilität des Systems* (III).

---

*) Vergl. den ohne Beweis aufgestellten Satz I im 17. Capitel von Transf. S. 297.

§ 4.

Ueber die eingliedrigen Untergruppen.

Im zweiten Paragraphen haben wir bewiesen, dass die Functionen $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ und $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$, sobald sie die Differentialgleichungen (III) und (IV) befriedigen, auf Grund der Systeme (I) und (II) oder der mit ihnen äquivalenten Recursionsformeln (21) und (19) eine r-gliedrige Transformationsgruppe bestimmen. Es bedarf kaum des Hinweises, dass hierdurch die Functionen $\varphi_{\mathfrak{a}}(u;0)$ und $f_{\mathfrak{a}}(x;u)$ als in der Nähe des Nullpunktes convergente Potenzreihen bestimmt sind, sobald die $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ und $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ als solche gegeben sind. Es wird auch hier die Bemerkung genügen, dass auf Grund der Differentialgleichungen (I) und (II) die Coefficienten der Potenzreihen für $\varphi_{\mathfrak{a}}(u;v)$ und $f_{\mathfrak{a}}(x;u)$ als ganze, ganzzahlige Functionen der Coefficienten niederer Ordnung und derjenigen der $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ und $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ gegeben sind; das lehren ja auch die Recursionsformeln.

Nach Satz 3 bestimmt daher im Besonderen jedes System von Constanten $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}$, welche die Bedingungen (VII) erfüllen, eine Parametergruppe $u_{\mathfrak{a}}' = \varphi_{\mathfrak{a}}(u;v)$, welche alle die im ersten Paragraphen aufgestellten Gesetze erfüllt; wir denken uns diese in ihrer canonischen Form gegeben, d. h. nehmen die Componenten $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ ihrer infinitesimalen Transformationen in der Form (VIII) an. Nun gehört zu jeder Parametergruppe eine ihr reciproke Gruppe $v_{\mathfrak{a}}' = \varphi_{\mathfrak{a}}(u;v)$; die Componenten der infinitesimalen Transformationen derselben:

$$\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v) = \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}(0;v)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} \tag{62}$$

stehen in einer bemerkenswerthen Beziehung zu den $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)$. Differentiiren wir nämlich Gleichung (I) nach $u_{\mathfrak{b}_1}$ und setzen dann $u_{\mathfrak{a}} = 0$, so folgt:

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \left\{ \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)}{\partial v_{\mathfrak{c}}} \eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(v) - \frac{\partial \eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(v)}{\partial v_{\mathfrak{c}}} \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(v) \right\} = 0.\text{*)} \tag{63}$$

Hieraus folgt zunächst:

$$\frac{\partial \eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(0)}{\partial v_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}}. \tag{64}$$

Bezeichnet man also die Coefficienten der Entwickelung von $\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)$ mit $B_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\ldots\mathfrak{b}_m}^{\mathfrak{a}}$, so ist:

$$B_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} = A_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}}, \tag{65}$$

---

*) Vergl. die von Herrn Engel herrührende Bemerkung in Transf. S. 429.

und es ergiebt sich überhaupt aus (63) durch Coefficientenvergleichung die der Gleichung (39) ähnliche Gleichung:

$$(66)\qquad A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\ldots\mathfrak{b}_m} - B^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2\ldots\mathfrak{b}_m}$$

$$+\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\frac{1}{(m-p-1)!\,p!}\Big\{A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\ldots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}} B^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\ldots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}}$$

$$- B^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\ldots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}} A^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\ldots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}}\Big\} = 0.$$

$$\{p = 1, 2, \ldots, m-1;\ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_{m-1} = 2, 3, \ldots, m\}$$

Sind nun die $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ in ihrer canonischen Form gegeben, sind also die Bedingungen (50) erfüllt, so gelten hiernach auch die Gleichungen:

$$(67)\qquad B^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\ldots\mathfrak{b}_m} + B^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\ldots\mathfrak{b}_m\mathfrak{b}} + \cdots + B^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_m,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\ldots\mathfrak{b}_{m-1}} = 0.$$

Denn dieselben sind erfüllt für $m=1$; nehmen wir also an, sie seien für $m = 1, 2, \ldots, l-1$ erfüllt, so folgt aus (66), wenn wir in dieser Gleichung die Indices $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_m$ auf alle mögliche Weise mit einander vertauschen und die Resultate dieser Vertauschung zu (66) addiren, dass Gleichung (67) auch für $m = l$ erfüllt ist. Es werden sich demnach nach (64) die $B^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\ldots\mathfrak{b}_m}$ ebenso aus den $c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}$ zusammensetzen, wie die $A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\ldots\mathfrak{b}_m}$ aus den $c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}$, oder es ist, weil diese Coefficienten für jedes ungerade $m > 1$ verschwinden, für $m > 1$:

$$(68)\qquad B^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\ldots\mathfrak{b}_m} = A^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\ldots\mathfrak{b}_m},$$

also:

$$(69)\qquad \omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u) - \eta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}\, u_{\mathfrak{c}}.$$

Wir erhalten daher den Satz:

Satz 4. *Zwischen den Componenten der infinitesimalen Transformationen, $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$, der Parametergruppe $u'_{\mathfrak{a}} = \varphi_{\mathfrak{a}}(u; v)$ und denen, $\eta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$, ihrer reciproken Gruppe $v'_{\mathfrak{a}} = \varphi_{\mathfrak{a}}(u; v)$ besteht, sobald dieselben in ihrer canonischen Form vorgelegt sind, die Beziehung:*

$$\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u) - \eta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}\, u_{\mathfrak{c}}.$$

Von besonderem Interesse ist es aber, zu untersuchen, wie sich die Recursionsformeln (19) gestalten, wenn die Parametergruppe in ihrer canonischen Form vorliegt. Nun ist doch:

$$(70)\qquad \frac{\partial\left(\dfrac{\partial^m \varphi_{\mathfrak{a}}(0;0)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1}\partial v_{\mathfrak{b}_2}\ldots\partial v_{\mathfrak{b}_m}}\right)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = B^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\ldots\mathfrak{b}_m}.$$

Vertauschen wir daher in (19) die Indices $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_{m+1}$ auf alle mögliche Weise mit einander und addiren die Resultate zu (19), so ergiebt sich wegen (67):

$$(71)\qquad \frac{\partial^{m+1} f_{\mathfrak{a}}(x;0)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1} \partial u_{\mathfrak{b}_2} \ldots \partial u_{\mathfrak{b}_{m+1}}} = \sum_{\mathfrak{d}=1}^{n} \frac{1}{m!} \frac{\partial\left(\dfrac{\partial^m f_{\mathfrak{a}}(x;0)}{\partial u_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}} \partial u_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}} \ldots \partial u_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}}}\right)}{\partial x_{\mathfrak{d}}} \xi_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m+1}}}(x).$$

$$\{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_{m+1} = 1, 2, \ldots, m+1\}$$

Handelt es sich um eine eingliedrige Gruppe, so ist diese Formel eine unmittelbare Folge aus der Gleichung:

$$(72)\qquad \frac{d f_{\mathfrak{a}}(x;u)}{du} = \xi_{\mathfrak{a}}\big(f(x;u)\big),$$

in welche die grundlegende Differentialgleichung (II) für $r=1$ übergeht.

Setzen wir nun:

$$(73)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x)\, u_{\mathfrak{c}} = \xi_{\mathfrak{a}}(x;u)$$

und bezeichnen mit $\frac{1}{m!} f_{\mathfrak{a}}^{(m)}(x;u)$ die Summe der Glieder m^{ter} Dimension in der Entwickelung von $f_{\mathfrak{a}}(x;u)$, so folgt aus (71):

$$(74)\qquad f_{\mathfrak{a}}^{(m+1)}(x;u) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}^{(m)}(x;u)}{\partial x_{\mathfrak{c}}}\, \xi_{\mathfrak{c}}(x;u).$$

Setzt man daher $u_{\mathfrak{a}} = a_{\mathfrak{a}} t$, so ergeben sich die Functionen $f_{\mathfrak{a}}(x;at)$ aus den Differentialgleichungen:

$$(75)\qquad \frac{d f_{\mathfrak{a}}(x;at)}{dt} = \xi_{\mathfrak{a}}\big(f(x;at);\, a\big)\cdot$$

Dies besagt offenbar, dass die den unendlich vielen Werthen von t entsprechenden Parametersysteme $u_{\mathfrak{a}} = a_{\mathfrak{a}} t$ in unserer r-gliedrigen Gruppe Transformationen bestimmen, die ihrerseits eine eingliedrige Untergruppe jener bilden. Wir können dies auch ganz direct einsehen. Aus Formel (VIII) folgt nämlich:

$$(76)\qquad \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)\, u_{\mathfrak{b}} = u_{\mathfrak{a}};$$

dasselbe folgt auch aus (37) und (50). Hieraus folgt:

$$(77)\qquad \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\, u_{\mathfrak{b}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} - \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u).$$

Nun ist doch nach (74):

$$(78)\qquad \varphi_{\mathfrak{a}}^{(2)}(u;v) = \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d},\mathfrak{e}=1}^{r} \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{d}}}\, \omega_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{e}}(u)\, v_{\mathfrak{c}}\, v_{\mathfrak{e}},$$

also wird nach (76) und (77):

(79) $$\varphi_a^{(2)}(u; u) = 0$$

und in Folge dessen nach (74) allgemein $\varphi_a^{(m)}(u; u) = 0$. Hieraus folgt aber, dass;

(80) $$\varphi_a(at, at') = a_a(t + t'),$$

wodurch unsere Behauptung ganz direct bewiesen ist; ist $t' = -t$, so ergiebt die Aufeinanderfolge dieser beiden Transformationen die Identität, oder die eine ist die Umkehrung der andern. Wir haben nunmehr den folgenden Satz bewiesen:

Satz 5. *Ist die Parametergruppe einer r-gliedrigen Transformationsgruppe auf ihre canonische Form gebracht, so bilden alle diejenigen Transformationen derselben, deren Parameter $u_a = a_a t$ man den unendlich vielen Werthen von t entsprechend erhält, eine eingliedrige Untergruppe, d. h. es ist $\varphi_a(at, at') = a_a(t + t')$. Die Gruppe selbst hat dann die Form*

(IX). $$f_a(x; u) = x_a + \sum_{m=1}^{\infty} f_a^{(m)}(x; u),$$

wo:

(X) $$f_a^{(1)}(x; u) = \sum_{c=1}^{r} \xi_a^c(x)\, u_c,$$

und:

(XI) $$f_a^{(m+1)}(x; u) = \sum_{b=1}^{n} \frac{\partial f_a^{(m)}(x; u)}{\partial x_b} f_b^{(1)}(x; u).$$

Sind umgekehrt die $\xi_a^b(x)$ als in der Nähe des Nullpunktes convergente Potenzreihen gegeben, welche den Bedingungen des Satzes 2 genügen, so sind die sich aus (IX) ergebenden Functionen $f_a(x; u)$ ebenfalls in der Nähe des Nullpunktes convergente Potenzreihen, welche eine r-gliedrige Transformationsgruppe darstellen, deren Transformationen sich zu je zweien als inverse ordnen).*

§ 5.

Ansatz zur Bestimmung aller Untergruppen.

Es wird nunmehr die Frage nahe liegen nach allen Untergruppen einer gegebenen Gruppe, die Frage also, ob es in der r-fachen Mannigfaltigkeit der Parameter derselben solche p-fache Untermannig-

*) Vergl. Transf. Theorem 24, p. 158.

faltigkeiten geben kann, dass die je zwei Stellen derselben entsprechenden Transformationen eine Transformation ergeben, deren Parameter einer Stelle derselben Untermannigfaltigkeit zugehören. Wir denken uns diese Mannigfaltigkeit gegeben in der Form:

$$u_\mathfrak{a} = a_\mathfrak{a}(t_1, t_2, \ldots, t_p), \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, r) \tag{81}$$

wo wir im Besonderen noch annehmen wollen, dass dieselbe den Nullpunkt enthalte, dass also etwa: $a\ (0) = 0$; wir werden später einsehen, bis zu welchem Grade diese Annahme nothwendig ist*). Gehört nun zwei Stellen $t_\mathfrak{b}$ und $s_\mathfrak{b}$ dieser Mannigfaltigkeit unserer Voraussetzung gemäss die Stelle $t_\mathfrak{b}' = \varkappa_\mathfrak{b}(t; s)$ zu, so muss sein:

$$a_\mathfrak{a}\big(\varkappa(t; s)\big) = \varphi_\mathfrak{a}\big(a(t); a(s)\big). \tag{82}$$

Ehe wir darauf eingehen, hieraus die Functionen $\varkappa_\mathfrak{b}(t; s)$ zu bestimmen, bemerken wir, dass dieselben jedenfalls wieder eine Parametergruppe bestimmen. Aus:

$$\varphi_\mathfrak{a}\Big(\varphi\big(a(t); a(s)\big);\ a(q)\Big) = \varphi_\mathfrak{a}\Big(a(t);\ \varphi\big(a(s);\ a(q)\big)\Big) \tag{83}$$

folgt nämlich:

$$\varphi_\mathfrak{a}\Big(a\big(\varkappa(t; s)\big); a(q)\Big) = \varphi_\mathfrak{a}\Big(a(t);\ a\big(\varkappa(s; q)\big)\Big), \tag{84}$$

oder:

$$a_\mathfrak{a}\Big(\varkappa\ \big(\varkappa(t; s); q\big)\Big) = a_\mathfrak{a}\Big(\varkappa\ \big(t; \varkappa(s; q)\big)\Big), \tag{85}$$

also, wenn anders die $a_\mathfrak{a}(t)$ wirklich von p Veränderlichen abhängen sollen:

$$\varkappa_\mathfrak{b}\big(\varkappa(t; s); q\big) = \varkappa_\mathfrak{b}\big(t; \varkappa(s; q)\big). \tag{86}$$

Um nun die Componenten der infinitesimalen Transformationen dieser p-gliedrigen Parametergruppe zu finden, differentiiren wir (82) nach $s_\mathfrak{b}$; wir erhalten so:

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{p} \frac{\partial a_\mathfrak{a}\big(\varkappa(t; s)\big)}{\partial \varkappa_\mathfrak{c}(t; s)} \frac{\partial \varkappa_\mathfrak{c}(t; s)}{\partial s_\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial \varphi_\mathfrak{a}\big(a(t); a(s)\big)}{\partial a_\mathfrak{c}(s)} \frac{\partial a_\mathfrak{c}(s)}{\partial s_\mathfrak{b}}. \tag{87}$$

Setzen wir daher:

$$\frac{\partial a_\mathfrak{a}(0)}{\partial s_\mathfrak{b}} = a_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}, \tag{88}$$

und

$$\frac{\partial \varkappa_\mathfrak{a}(t; 0)}{\partial s_\mathfrak{b}} = \lambda_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(t), \tag{89}$$

---

*) Vergl. § 7.

so folgt:

$$(90)\qquad \sum_{\mathfrak c=1}^{p} \frac{\partial a_{\mathfrak a}(t)}{\partial t_{\mathfrak c}} \lambda^{\mathfrak b}_{\mathfrak c}(t) = \sum_{\mathfrak c=1}^{r} a^{\mathfrak b}_{\mathfrak c}\, \omega^{\mathfrak c}_{\mathfrak a}\big(a(t)\big).$$

Differentiirt man diese Gleichung nach $t_{\mathfrak d}$, so folgt:

$$(91)\qquad \sum_{\mathfrak c=1}^{p} \left\{ \frac{\partial^2 a_{\mathfrak a}(t)}{\partial t_{\mathfrak c}\,\partial t_{\mathfrak d}} \lambda^{\mathfrak b}_{\mathfrak c}(t) + \frac{\partial a_{\mathfrak a}(t)}{\partial t_{\mathfrak c}} \frac{\partial \lambda^{\mathfrak b}_{\mathfrak c}(t)}{\partial t_{\mathfrak d}} \right\} = \sum_{\mathfrak c, \mathfrak e=1}^{r} a^{\mathfrak b}_{\mathfrak c} \frac{\partial \omega^{\mathfrak c}_{\mathfrak a}\big(a(t)\big)}{\partial a_{\mathfrak e}(t)} \frac{\partial a_{\mathfrak e}(t)}{\partial t_{\mathfrak d}}.$$

Setzt man daher:

$$(92)\qquad \frac{\partial \lambda^{\mathfrak b}_{\mathfrak c}(t)}{\partial t_{\mathfrak d}} - \frac{\partial \lambda^{\mathfrak d}_{\mathfrak c}(t)}{\partial t_{\mathfrak b}} = \gamma^{\mathfrak c}_{\mathfrak d, \mathfrak b},$$

so folgt hieraus:

$$(93)\qquad \sum_{\mathfrak c=1}^{p} a^{\mathfrak c}_{\mathfrak a}\, \gamma^{\mathfrak c}_{\mathfrak d, \mathfrak b} = \sum_{\mathfrak c, \mathfrak e=1}^{r} a^{\mathfrak b}_{\mathfrak c}\, a^{\mathfrak d}_{\mathfrak e}\, c^{\mathfrak a}_{\mathfrak c, \mathfrak e}.$$

Sollen die $\gamma^{\mathfrak c}_{\mathfrak d, \mathfrak b}$ hierdurch bestimmt sein, so dürfen offenbar nicht alle Determinanten p^{ter} Ordnung der Matrix $\|a^{\mathfrak b}_{\mathfrak a}\|$ verschwinden; dies folgt auch schon aus (90), weil sonst, da ja sicher nicht alle Determinanten p^{ter} Ordnung der Matrix:

$$\left\| \frac{\partial a_{\mathfrak a}(t)}{\partial t_{\mathfrak b}} \right\|$$

identisch verschwinden dürfen, zwischen den Componenten der infinitesimalen Transformationen der Untergruppe Relationen von der Form (VI) bestehen würden, dieselbe also weniger als p-gliedrig wäre. Wir können daher die Matrix $\|a^{\mathfrak b}_{\mathfrak a}\|$ zu einer nicht verschwindenden Determinante r^{ter} Ordnung $|a^{\mathfrak b}_{\mathfrak a}|$ ergänzen und dann durch die Gleichungen:

$$(94)\qquad u_{\mathfrak a} = \sum_{\mathfrak b=1}^{r} a^{\mathfrak b}_{\mathfrak a}\, s_{\mathfrak b}$$

die neuen Parameter $s_{\mathfrak b}$ einführen. Sind die Parameter $u_{\mathfrak a}$ so gewählt, dass die Componenten der infinitesimalen Transformationen $\omega^{\mathfrak b}_{\mathfrak a}(u)$ in ihrer canonischen Form erscheinen, so gilt dasselbe von den transformirten Componenten $u^{\mathfrak b}_{\mathfrak a}(s)$; denn zwischen ihnen besteht die (90) analoge Gleichung:

$$(95)\qquad \sum_{\mathfrak c=1}^{r} a^{\mathfrak c}_{\mathfrak a}\, \mu^{\mathfrak b}_{\mathfrak c}(s) = \sum_{\mathfrak c=1}^{r} a^{\mathfrak b}_{\mathfrak c}\, \omega^{\mathfrak c}_{\mathfrak a}(u);$$

multiplicirt man dieselben mit $s_{\mathfrak b}$ und summirt über $\mathfrak b$, so ergiebt sich auch für die $\mu^{\mathfrak b}_{\mathfrak c}(s)$ die für die canonische Form charakteristische Gleichung (76). Aber die Grössen $c_{\mathfrak a, \mathfrak d}$ gehen nunmehr in andere $\gamma^{\mathfrak c}_{\mathfrak a, \mathfrak d}$ über auf Grund der Gleichungen, die man aus (93) erhält, wenn man auf der linken Seite die Summe von 1 bis r nimmt. Wir werden daher jede Verwandlung der Parameter einer Transformationsgruppe dadurch bewerkstelligen können, dass wir erstens eine solche wie (45) ausführen, welche die $c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ nicht ändert, und zweitens eine homogene lineare Transformation, welche die canonische Form bestehen lässt.

Ist nun in diesen neuen Parametern die der Untergruppe entsprechende Mannigfaltigkeit in der Form: $s_{\mathfrak{a}} = b_{\mathfrak{a}}(t)$ gegeben, so ist offenbar:

$$\frac{\partial b_{\mathfrak{a}}(0)}{\partial t_{\mathfrak{b}}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}.$$

Wir können daher die Parameter von vornherein so gewählt denken, dass $a^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, wodurch die Gleichungen (93) in die folgenden übergehen:

(96) $\gamma^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}} = c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}}$, wenn $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d} \leqq p$, und: $0 = c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}}$, wenn $\mathfrak{b}, \mathfrak{d} \leqq p$, $\mathfrak{a} > p$.

Hieraus sieht man, dass die $\gamma^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}} = c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}}$ wirklich den Bedingungen (VII) genügen, wenn man in ihnen nur bis p summirt, dass also die $\gamma^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}}$ wirklich die Zusammensetzung einer p-gliedrigen Gruppe bilden. Denkt man sich ferner sowohl $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ wie $\lambda^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(t)$ in ihrer canonischen Form, so ergiebt sich aus (III) leicht, dass:

$$(97)\quad \begin{cases} \lambda^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(t) = \omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(t_1, t_2, \ldots, t_p, 0, \ldots, 0) \\ \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \leqq p) \\ \text{und:} \\ 0 = \omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(t_1, t_2, \ldots, t_p, 0, \ldots, 0); \\ \qquad (\mathfrak{a} > p, \ \mathfrak{b} \leqq p) \end{cases}$$

denn haben die Indices $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_m$ nur die Zahlen von 1 bis p zu durchlaufen, so fallen von selbst diejenigen Glieder fort, für welche $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots, \mathfrak{d}_{m-1}$ einen der Werthe $p+1, p+2, \ldots, r$ hat. Hieraus ergiebt sich auf Grund des Satzes 5, dass:

$$(98)\quad \begin{cases} \varkappa_{\mathfrak{a}}(t, t) = \varphi_{\mathfrak{a}}(t_1, \ldots, t_p, 0, \ldots, 0;\ s_1, \ldots, s_p, 0, \ldots, 0) \\ \qquad (\mathfrak{a} \leqq p) \\ \text{und:} \\ \quad 0 = \varphi_{\mathfrak{a}}(t_1, \ldots, t_p, 0, \ldots, 0;\ s_1, \ldots, s_p, 0, \ldots, 0). \\ \qquad (\mathfrak{a} > p) \end{cases}$$

Daraus folgt, dass $a_{\mathfrak{a}}(t) = t_{\mathfrak{a}}$, wenn $\mathfrak{a} \leqq p$, und $= 0$, wenn $\mathfrak{a} > p$. In dem zuerst angenommenen allgemeinen Falle sind daher die $a_{\mathfrak{a}}(t)$ homogene lineare Functionen, deren Coefficienten $a^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}$ den Bedingungen zu genügen haben, die sich aus (93) ergeben; dieselben stellen sich dar in der Form einer Reihe von Determinanten, die von den $\gamma^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}}$ frei sind, sodass das Problem der Bestimmung aller Untergruppen einer gegebenen Gruppe auf algebraische Untersuchungen hinauskommt*). Aus (98) geht noch hervor, dass jedem solchen Systeme von Coefficienten $a_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$ wirklich eine Untergruppe der gegebenen Gruppe entspricht.

Wir erhalten daher das Resultat:

Satz 6. *Ist die Parametergruppe einer Transformationsgruppe in ihrer canonischen Form vorgelegt, so erhält man alle p-gliedrigen Untergruppen derselben, wenn man:*

$$u_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{p} a_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} t_{\mathfrak{b}}$$

setzt, wo die $a_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$ so zu wählen sind, dass die Gleichungen:

$$\text{(XII)} \qquad \sum_{\mathfrak{d}=1}^{p} a_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{d}} \gamma_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}^{\mathfrak{d}} = \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}=1}^{r} a_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{c}} c_{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}},$$

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{c} = 1, 2, \ldots, p)$$

durch geeignete $\gamma_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}$ befriedigt werden können.

§ 6.

Bestimmung der Componenten der infinitesimalen Transformationen aller transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung.

Unter einer transitiven Gruppe verstehen wir eine solche, welche einen Punkt allgemeiner Lage in jeden benachbarten überführt, woraus folgt, dass dann $n \leq r$ sein muss. Ist der Punkt $x_{\mathfrak{a}} = 0$ ein solcher Punkt allgemeiner Lage, so folgt weiter, dass nicht alle n-gliedrigen Determinanten der Matrix:

$$\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0)$$

verschwinden dürfen. Hieraus folgt, dass man immer solche Parameter einführen kann, dass:

$$\text{(99)} \qquad \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}.$$

Führen wir nämlich die neuen Parameter durch die Gleichungen (94) ein, so gehen die $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ über in:

$$\text{(100)} \qquad \left(\frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x; u)}{\partial s_{\mathfrak{c}}}\right)_{s=0} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)\, a_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}.$$

Setzen wir daher $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0) = b_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$, so ergeben sich für die $a_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}$ die Bedingungen:

*) S. Transf. Theorem 33, S. 210.

$$(101)\qquad \sum_{\mathfrak{d}=1}^{r} \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{d}} a_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{c}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}, \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n \\ \mathfrak{c} = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}$$

welche unter der oben gemachten Voraussetzung stets erfüllt werden können; nehmen wir z. B. an, dass die Determinante

$$|b_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{d}}| \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{d} = 1, 2, \ldots, n)$$

von Null verschieden ist, so können wir die Grössen $a_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{c}}$, wo $\mathfrak{c} = 1, 2, \ldots, r$ und $\mathfrak{d} = n+1, n+2, \ldots, r$, noch insoweit willkürlich annehmen, dass nicht alle $(r-n)$-gliedrigen Determinanten der betreffenden Matrix $\|a_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{c}}\|$ verschwinden, und es werden dann die übrigen $a_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{c}}$ dadurch so bestimmt sein, dass die Determinante des Systems (94) nicht verschwindet. Denn resultirte eine verschwindende Determinante $|a_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{c}}|$, so müssten entweder alle $b_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$ oder alle $\delta_{a,c}$ verschwinden, was ausgeschlossen. Wir können uns daher die Parameter immer so gewählt denken, dass die Gleichungen (99) erfüllt sind.

Soll nunmehr die Zusammensetzung unserer Gruppe, d. h. sollen die Grössen $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}$ gegeben sein, so folgt aus den Differentialgleichungen (IV):

$$(102)\qquad \begin{cases} c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} = \dfrac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0)}{\partial x_{\mathfrak{b}_1}} - \dfrac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(0)}{\partial x_{\mathfrak{b}}} & (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1 \leqq n), \\[2ex] c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}} = \dfrac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(0)}{\partial x_{\mathfrak{b}}} & (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \leqq n, \mathfrak{b}_1 > n), \\[2ex] c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}} = 0. & (\mathfrak{a} \leqq n, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1 > n). \end{cases}$$

Die letzten Gleichungen besagen offenbar, dass unsere Gruppe eine $(r-n)$-gliedrige Untergruppe enthalten muss. Enthält umgekehrt die Gruppe eine $(r-n)$-gliedrige Untergruppe, so müssen sich nach dem letzten Paragraphen die $c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}}$ immer in eine solche Form setzen lassen, dass $c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}} = 0$, falls $\mathfrak{a} \leqq n$ und $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1 > n$; die aus den Gleichungen (XII) durch Ausdehnung der Summation über $\mathfrak{d}$ von 1 bis r entstehenden Gleichungen dienen dazu.

Um nun das System (IV) zu integriren, setzen wir wieder:

$$(103)\qquad \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\, C_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\ldots\mathfrak{b}_m}^{\mathfrak{a}}\, x_{\mathfrak{b}_1} x_{\mathfrak{b}_2} \cdots x_{\mathfrak{b}_m};$$
$$\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_m = 1, 2, \ldots, n\}$$

dann ergiebt sich zunächst:

$$
(104) \qquad \begin{cases} C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} - C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}} = c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}, & (\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1 < n) \\ C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} = c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}. & (\mathfrak{a},\mathfrak{b}_1 \leq n, \mathfrak{b} > n) \end{cases}
$$

Ferner:

$$
(105) \qquad C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} - C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}\, C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\cdots\mathfrak{b}_m}
$$
$$
-\sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{1}{(m-p-1)!\,p!}\Big\{C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}}\, C^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}}
$$
$$
- C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}}\, C^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}}\Big\},
$$
$$
\{p = 1, 2, \ldots, m-1;\ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_{m-1} = 2, 3, \ldots, m\}
$$

wenn $\mathfrak{b} \leq n$, und:

$$
(106) \qquad C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} = \sum_{\mathfrak{c}=1} c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}\, C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\cdots\mathfrak{b}_m}
$$
$$
-\sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{1}{(m-p-1)!\,p!}\Big\{C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}}\, C^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}}
$$
$$
- C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}}\, C^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}}\Big\},
$$
$$
\{p = 1, 2, \ldots, m-1;\ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_{m-1} = 2, 3, \ldots, m\}
$$

wenn $\mathfrak{b} > n$, endlich:

$$
(107) \qquad \sum_{\mathfrak{c}=n+1}^{r} c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}\, C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\cdots\mathfrak{b}_m}
$$
$$
= \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{1}{(m-p-1)!\,p!}\Big\{C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}}\, C^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}}
$$
$$
- C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p-1}}}\, C^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-1}}}\Big\},
$$
$$
\{p = 1, 2, \ldots, m-1;\ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_{m-1} = 2, 3, \ldots, m\}
$$

wenn $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1 > n$. Es lässt sich nun genau wie im dritten Paragraphen zeigen, dass die Gleichungen (VII) die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das widerspruchslose Bestehen dieser Gleichungen sind. Bezeichnet man nämlich mit $v^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}(x)$ die linke Seite von (IV), so ergeben sich als solche Bedingungen wieder die, dass die Gleichungen:

$$
(108) \qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{\partial \xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{c}}}\, v^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2}(x) + \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_1}\, v^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}(x) = 0
$$

identisch befriedigt sind, und zwar hat das Verschwinden der Coefficienten aller Glieder $(l-2)^{\text{ter}}$ und niederer Dimension das widerspruchslose Bestehen der Gleichungen (105) bis (107) für alle m von 1 bis l zur Folge, und umgekehrt. Da man aber dann die $C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m}$ so bestimmen kann, dass in (IV) die Coefficienten aller Glieder $(l-1)^{\text{ter}}$ und niederer Dimension verschwinden, so gilt dasselbe für die Gleichungen (108), also bestehen die Gleichungen (105) bis (107) auch widerspruchslos für $m = l+1$.

Nimmt man in der That an, man kenne alle $C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m}$, wenn m alle Werthe von 1 bis l hat, so lehren die Gleichungen (106) diese selben Grössen für $m = l+1$ und $\mathfrak{b} > n$ kennen, während die Gleichungen (105) die Differenzen derselben für $m = l+1$ und $\mathfrak{b} \leqq n$ liefern.

Diese Grössen werden also wiederum vollständig bekannt sein, wenn wir noch festsetzen, dass:

$$(109)\quad C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} + C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_m,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\cdots\mathfrak{b}_{m-1}} + \cdots + C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\cdots\mathfrak{b}_m\mathfrak{b}} = 0. \qquad (\mathfrak{b} \leqq n)$$

Wir erhalten dann wieder die folgenden Recursionsformeln:

$$(110)\qquad (m+1)\,C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{1}{(m-1)!}\, c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1},\mathfrak{b}}\, C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c}.\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_3}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}}$$

$$\{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_m = 1, 2, \ldots, m\}$$

$$-\sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{1}{(m-p)!\,p!}\, C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}}\, C^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p+1}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}},$$

$$\{p = 1, 2, \ldots, m-1;\ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_m = 1, 2, \ldots m\}$$

wenn $\mathfrak{b} \leqq n$, und:

$$(111)\qquad m\,C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots,\mathfrak{b}_m} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{1}{(m-1)!}\, c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1},\mathfrak{b}}\, C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_3}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}}$$

$$\{\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_m = 1, 2, \ldots, m\}$$

$$-\sum_{\mathfrak{c}=1} \frac{1}{(m-p)!\,p!}\, C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_1}\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_2}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p}}}\, C^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_{m-p+1}}\cdots\mathfrak{b}_{\mathfrak{c}_m}},$$

$$\{p = 1, 2, \ldots, m-1;\ \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_m = 1, 2, \ldots, m\}$$

wenn $\mathfrak{b} > n$. Hieraus lassen sich die Coefficienten $C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m}$ vollständig bestimmen. Man findet so:

$$(112)\qquad C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} = \frac{1}{2}\, c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}} \quad \text{oder} \quad = c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}},$$

je nachdem $\mathfrak{b} \leqq n$ oder $> n$; ferner:

$$(113)\quad C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2} = \frac{1}{12}\sum_{\mathfrak{c}=1}^{n}\left(c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_2} + c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_2} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_1}\right) + \frac{1}{3}\sum_{\mathfrak{c}=n+1}^{r}\left(c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_2} + c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_2} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_1}\right),$$

wenn $\mathfrak{b} \leqq n$, und:

$$(114)\qquad C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2} = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{c}=n+1}^{r}\left(c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_2} + c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_2}c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_1}\right),$$

wenn $\mathfrak{b} > n$. Man erhält so den Formeln (54) durchaus gleichgebildete Ausdrücke für die $C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m}$ mit dem einzigen Unterschiede, dass die dort stehende einzige Summe durch mehrere mit verschiedenen Coefficienten λ_m behaftete Summen zu ersetzen ist, die sich ihrerseits von einander dadurch unterscheiden, dass in den verschiedenen Summen über einige der Indices $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_{m-1}$ von 1 bis n über die andern von $n+1$ bis r zu summiren ist. Die vollständige Entwickelung dieser Ausdrücke ist zu complicirt, als dass sie mehr liefern könnte als die Recursionsformeln (110) und (111). Wir verzichten daher auf diese Entwickelung, zumal wir die Convergenz unserer Reihe auch ohne dieselbe beweisen können.

Ersetzen wir nämlich die Grössen $c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ wieder durch die positive Grösse g, wo $|c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}| \leqq g$, so ist leicht zu sehen, dass für $m = 1$ und 2:

$$(115)\qquad |C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m}| \leqq g^m r^{m-1} m!.$$

Nehmen wir daher an, diese Ungleichung sei für alle m von 1 bis $l-1$ bewiesen, so folgt aus (110) für $\mathfrak{b} < n$

$$(116)\qquad |C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_l}| \leqq \frac{1}{l+1}g^l r^{l-1}\bigl(l(l-1)! + l_1(l-1)! + l_2(l-2)!\,2! + l_3(l-3)!\,3! + \cdots + l_{l-2}2!\,(l-2)! + l_{l-1}(l-1)!\bigr),$$

wo $l_1, l_2, \ldots, l_{l-1}$ die Binomialcoefficienten; dieselbe Formel erhält man aus (111) für $\mathfrak{b} > n$, nur dass rechts der Nenner l steht. Es gilt also die Ungleichung (115) auch für $m = l$. Hieraus folgt wiederum, dass:

$$(117)\qquad |\xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x)| \leqq 1 + \frac{1}{r}\sum_{m=1}^{\infty}(gr)^m(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)^m,$$

sodass unsere Reihen sicher convergiren, so lange:

$$(118)\qquad |x_1| + |x_2| + \cdots |x_n| < \frac{1}{rg}.$$

Um nun festzustellen, ob die so gefundenen Componenten $\xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x)$ der infinitesimalen Transformationen wirklich eine r-gliedrige Gruppe bestimmen, müssen wir noch untersuchen, ob Relationen von der Form (VI) bestehen können. Aus (99) ergiebt sich nun, dass dann sicher

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

sein muss. Es frägt sich also, ob die folgenden Relationen bestehen können:

$$(119)\qquad \sum_{\mathfrak{b}=n+1}^{r} a_{\mathfrak{b}}\, C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} = 0;$$

hieraus folgt im Besonderen:

$$(120)\qquad \sum_{\mathfrak{b}=n+1}^{r} a_{\mathfrak{b}} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}} = 0, \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1 = 1, 2, \ldots, n).$$

Nach (106) müsste demnach sein:

$$(121)\qquad \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}=n+1}^{r} a_{\mathfrak{b}}\, c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}\, C^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\cdots\mathfrak{b}_m} = 0,$$

woraus wieder im Besonderen folgt:

$$(120)\qquad \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}=n+1}^{r} a_{\mathfrak{b}}\, c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}\, c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{c}} = 0. \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 = 1, 2, \ldots, n).$$

So weiter schliessend findet man, dass die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen der Relationen (119) die Gleichungen sind:

$$(121)\qquad \sum_{\mathfrak{d},\mathfrak{d}_1,\ldots,\mathfrak{d}_m=n+1}^{r} a_{\mathfrak{d}}\, c^{\mathfrak{d}_1}_{\mathfrak{d},\mathfrak{b}_1}\, c^{\mathfrak{d}_2}_{\mathfrak{d}_1,\mathfrak{b}_2} \cdots c^{\mathfrak{d}_{m-1}}_{\mathfrak{d}_{m-2},\mathfrak{b}_{m-1}}\, c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{d}_{m-1},\mathfrak{b}_m} = 0. \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_m = 1, 2, \ldots, n).$$

Nur also, wenn es Grössen $a_{\mathfrak{d}}$ giebt, welche alle diese unendlich vielen Gleichungen befriedigen, hängt unsere Gruppe von weniger als r Parametern ab. Man wolle bemerken, dass die letzten Entwickelungen unabhängig von dem Bestehen der Gleichungen (109) sind, also für alle Lösungssysteme der Differentialgleichungen (IV) gelten, die den Anfangsbedingungen (99) genügen.

Wir erhalten diese allgemeinsten Lösungen wieder aus dem entwickelten speciellen Systeme durch Einführung neuer Veränderlicher vermittelst der Gleichungen:

$$(122)\qquad z_{\mathfrak{a}} = h_{\mathfrak{a}}(x), \quad x_{\mathfrak{a}} = H_{\mathfrak{a}}(z),$$

wo:

$$h_{\mathfrak{a}}(0) = 0$$

und

$$\frac{\partial h_{\mathfrak{a}}(0)}{\partial x_{\mathfrak{b}}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}};$$

dieselben sind:

$$\xi_a^b(z) = \sum_{c=1}^{n} \frac{\partial h_a(H(z))}{\partial H_c(z)} \xi_c^b\big(H(z)\big). \tag{123}$$

Wir brauchen diese mit den Entwickelungen auf S. 176 und 177 fast identischen Schlüsse nicht besonders auszuführen. Führt man endlich hierin vermittelst einer linearen Substitution neue Veränderliche ein, so erhält man die Componenten der infinitesimalen Transformationen der allgemeinsten transitiven r-gliedrigen Transformationsgruppe des Raumes von n Dimensionen von gegebener Zusammensetzung ($c_{a,b}^c$) und gegebener Zurückführung dieser Grössen auf die den letzten der Gleichungen (102) entsprechende Form.

Wir können die Resultate dieses Paragraphen in folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 7. *Ist ein System von Constanten $\gamma_{a,b}^c$ gegeben, welche den Gleichungen:*

$$\sum_{c=1}^{r} (\gamma_{b,b_1}^c \gamma_{b_2,c}^a + \gamma_{b_1,b_2}^c \gamma_{b,c}^a + \gamma_{b_2,b}^c \gamma_{b_1,c}^a) = 0$$

genügen, so findet man folgendermassen die Componenten der infinitesimalen Transformationen der allgemeinsten zugehörigen transitiven, r-gliedrigen Transformationsgruppe des Raumes von n Dimensionen: Nachdem man die Constanten $\gamma_{a,b}^c$ auf jede mögliche Art mit Hülfe der Substitution:

$$\sum_{c=1}^{r} a_a^c c_{b,b}^c = \sum_{c,e=1}^{r} a_c^b a_e^b \gamma_{e,c}^a, \tag{XIII}$$

wo die Determinante $|a_a^b|$ von Null verschieden sein muss, auf eine solche Form gebracht hat, dass erstens $c_{a,b}^c = 0$, sobald $a, b > n$ und $c \leq n$, und zweitens nicht solche von Null verschiedene Grössen a_b gefunden werden können, dass die sämmtlichen Gleichungen:

$$\sum_{b,b_1,b_2,\ldots,b_m=n+1}^{r} a_b \, c_{b,b_1}^{b_1} c_{b_1,b_2}^{b_2} \cdots c_{b_{m-2},b_{m-1}}^{b_{m-1}} c_{b_{m-1},b_m}^{a} = 0, \tag{XIV}$$

$$(a, b_1, b_2, \ldots, b_m = 1, 2, \ldots, n)$$

wenn m alle Werthe von 1 bis ∞ hat, erfüllt werden können, nachdem man ferner die Coefficienten der in der Nähe des Nullpunktes convergenten Reihen:

$$\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} C_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m}^{\mathfrak{a}} x_{\mathfrak{b}_1} x_{\mathfrak{b}_2} \cdots x_{\mathfrak{b}_m}$$

$$\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_m = 1, 2, \ldots, n\}$$

den Anfangsbedingungen (112) *und den Recursionsformeln* (110) *und* (111) *gemäss bestimmt hat, sodass:*

(XV) $$\sum_{\mathfrak{b}=1}^{n} x_{\mathfrak{b}} \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x) = x_{\mathfrak{a}}, \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n),$$

so wähle man irgend eine Transformation

$$x_{\mathfrak{a}} = H_{\mathfrak{a}}(z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

deren Umkehrung $z_{\mathfrak{a}} = h_{\mathfrak{a}}(x)$; *alsdann sind die:*

(XVI) $$\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(z) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{\partial h_{\mathfrak{a}}(H(z))}{\partial H_{\mathfrak{c}}(z)} \xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}\big(H(z)\big) \qquad \begin{Bmatrix} \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n \\ \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, r \end{Bmatrix}$$

*die verlangten Componenten.**)

Die Bestimmung aller r-gliedrigen *intransitiven* Transformationsgruppen des Raumes von n Dimensionen von gegebener Zusammensetzung $(c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}})$ kann auf die der transitiven Gruppen zurückgeführt werden. Sie verlangt aber dann die Kenntniss nicht nur des gegebenen Systems von Constanten $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}$, sondern aller solcher Systeme, welche die Gleichungen (VII) befriedigen; wir glauben desshalb auf dies Problem hier noch nicht eingehen zu dürfen.

§ 7.

Ueber die identische Transformation.

Wir haben bisher immer nur solche Transformationsgruppen betrachtet, welche die identische Transformation enthalten; in der That lässt sich der allgemeinere Fall auf diesen zurückführen. Haben wir nämlich die durch die Gleichung:

(124) $$f_{\mathfrak{a}}\big(f(x; u); v\big) = f_{\mathfrak{a}}\big(x; \varphi(u; v)\big)$$

charakterisirte Gruppe, so mögen die Functionen $f_{\mathfrak{a}}(x; u)$ und $\varphi_{\mathfrak{b}}(u; v)$

*) Vergl. Transf. Kap. 19 und 22; man wolle aber bemerken, dass bei Herrn Lie die Bestimmung aller transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung immer nur gelöst ist unter der Voraussetzung, dass *eine* solche Gruppe bekannt sei. Was die Theorie der Aehnlichkeit r-gliedriger Gruppen betrifft, so sei darauf hingewiesen, dass unser Satz den Satz 3 in Transf. S. 359 umfasst.

etwa zunächst für gewisse Umgebungen (x), (u), (v) von resp. $x_a = 0$, $u_b = 0$, $v_c = 0$ sich nach Potenzen der x_a, u_b, v_c entwickeln lassen. Wenn dann die Transformation:

$$y_a = f_a(x; 0) = f_a(x) \tag{125}$$

als den dem Bereiche (x) entsprechenden Bereich keinen in diesen hineinfallenden Bereich (y) liefert, so müssen, sollen die Gleichungen (124) überhaupt Bedeutung haben, die nach Potenzen von

$$y_a - b_a = y_a - f_a(0)$$

fortschreitenden Reihen $f_a(y; u)$ jedenfalls analytische Fortsetzungen der um den Nullpunkt convergenten Reihen $f_a(x; u)$ sein. Liegen auch die Punkte des dem Bereiche (u) auf Grund der Gleichung:

$$s_b = \varphi_b(u; 0) = \varphi_b(u) \tag{126}$$

entsprechenden Bereiches (s) nicht in (u), so müssen auch die nach Potenzen von $s_b - c_b = s_b - \varphi_b(0)$ fortschreitenden Reihen $f_a(x; s)$ und $\varphi_b(s; v)$ analytische Fortsetzungen der in der Nähe der Nullpunkte convergenten Reihen $f_a(x; u)$ und $\varphi_a(u; v)$ sein.

Wir machen weiter die Annahme, die man durch Einführung neuer Parameter wird realisiren können, dass die Gleichungen (125) umkehrbar seien, also:

$$x_a = F_a(y); \tag{127}$$

nehmen wir im Besonderen noch an, dass diese Umkehrung in der Nähe des Nullpunktes $x_a = 0$ möglich sei, so werden die $F_a(y)$ zunächst als nach Potenzen der $y_a - b_a$ fortschreitende Reihen definirt sein, die sich aber auch in nach Potenzen von $y_a - f_a(b')$ fortschreitende Reihen müssen fortsetzen lassen, wo die Stelle b_a' in beliebiger Nähe von b_a liegt. Setzen wir daher:

$$f_a(x; u) = f_a\big(F(y); u\big) = g_a(y; u) = g_a\big(f(x); u\big), \tag{128}$$

so gilt dasselbe von den Functionen $g_a(y; u)$ bezüglich der y_b; was die u_b betrifft, so sind die $g_a(y; u)$ zunächst ebenso wie die $f_a(x; u)$ als nach Potenzen der u_b fortschreitende Reihen definirt, die sich aber in nach Potenzen der $s_b - c_b$ fortschreitende Reihen fortsetzen lassen.

Aus (124) folgt nun zunächst für $v = 0$:

$$f_a\big(f(x; 0)\big) = f_a(x; s) = g_a(y; s); \tag{129}$$

es ist daher:

$$f_a\big(f(x; u); v\big) = g_a\Big(f\big(f(x; u)\big); v\Big) = g_a\big(g(y; s); v\big). \tag{130}$$

Andrerseits ist:

$$f_a\big(x; \varphi(u; v)\big) = g_a\big(y; \varphi(u; v)\big) \quad = g_a\big(y; \psi(s; v)\big). \tag{131}$$

wenn:

$$(132) \qquad u_b = \Phi_b(s)$$

und:

$$(133) \qquad \varphi_b(u;v) = \varphi_b\big(\Phi(s);v\big) = \psi_b(s;v)$$

gesetzt wird; denn durch Einführung der neuen Parameter können wir auch die Umkehrbarkeit der Gleichungen (126) erreichen. Wir erhalten daher die Gleichungen:

$$(134) \qquad g_a\big(g(y;s);v\big) = g_a\big(y;\psi(c;v)\big);$$

dieselben sind zunächst bewiesen, so lange als die y_a in der Nähe von b_a, die s_b in der Nähe von c_b und die v_b in der Nähe von Null liegen. Nun ist aber die linke Seite jener Gleichungen auch definirt, wenn die y_a in der Nähe von b_a, die s_b und v_b in der Nähe von Null liegen und zwar durch die Fortsetzung obiger nach Potenzen der $s_b - c_b$ fortschreitenden Reihen; dasselbe gilt daher von der ihr jedesmal gleichen rechten Seite. Denn denkt man sich die Fortsetzung links und rechts für einen geeigneten Punkt $s_b = d_b$ des ursprünglichen Bereiches in in der Nähe von $s_b = c_b$ gemacht so, dass die linke Seite über diesen Bereich hinaus convergirt, so gilt dasselbe von der rechten Seite, da die Coefficienten der einzelnen Potenzen der $s_b - d_b$ auf der linken und rechten Seite unabhängig von den s_b einander gleich sind.

Es ist demnach durch die Gleichungen (128), (133) und (134) eine Gruppe charakterisirt, welche die identische Transformation enthält; denn aus (128) folgt sofort:

$$(135) \qquad g_a(y;0) = f_a(x;0) = y_a.$$

Wir erhalten daher jede Transformation der ursprünglichen Gruppe, wenn wir erst die Transformation (125) und dann eine Transformation:

$$(136) \qquad y_a' = g_a(y;u)$$

der von uns behandelten Art von Gruppen ausführen. Was nun die Transformation (125) betrifft, so folgt aus (130) leicht, dass:

$$(137) \qquad f_a(y) = g_a(y;c),$$

dass diese Transformation also die analytische Fortsetzung einer Transformation der Gruppe (136) ist. Es ist also auch jede Transformation der ursprünglichen Gruppe eine analytische Fortsetzung einer Transformation dieser Gruppe. In der That ist:

$$(138) \quad g_a\big(g(y;c);v\big) = g_a\big(y;\psi(c;v)\big) = f_a\big(x;\psi(c;v)\big) = f_a\big(x;\varphi(0;v)\big)$$
$$= f_a\big(f(x;0);v\big) = f_a(y;v),$$

oder:

$$(139) \qquad f_a(y;v) = g_a\big(y;\psi(c;v)\big).$$

Diese Gleichung zeigt uns nun auch, wie die identische Transformation, welche eigentlich jede endliche Transformationsgruppe enthält, bei einer bestimmten analytischen Darstellung derselben gewissermassen latent werden kann: Man führe in die Gruppe $y_a' = g_a(y; u)$ durch die Gleichungen $u_b = \psi_b(c; v)$ neue Parameter ein; geht $g_a(y; u)$ hierdurch in $f_a(y; v)$ über, so ist es sehr wohl möglich, dass diese nach Potenzen von v_b fortschreitenden Reihen nicht in denjenigen Punkt $v_b = c_b'$ fortsetzbar sind, welcher durch die Gleichungen $\psi_b(c; c') = 0$ bestimmt ist. Ist dem wirklich so, so enthält die durch die Functionenelemente $y_a' = f_a(y; v)$ definirte Transformationsgruppe die identische Transformation nicht, sie kann aber durch Einführung geeigneter Parameter immer in eine solche mit der identischen Transformation übergeführt werden. Wir erhalten demnach das Resultat:

Satz 8. *Jede endliche Transformationsgruppe, welche im Bereiche der Fortsetzungen der sie definirenden Functionenelemente die identische Transformation nicht enthält, kann durch Einführung geeigneter Parameter in eine die identische Transformation enthaltende Gruppe übergeführt werden.**)

Hiermit ist auch die Berechtigung der von uns in § 5 gemachten Annahme nachgewiesen, dass jede Untergruppe die identische Transformation enthalte.

Dorpat, im April 1889.

*) Vergl. Transf. Theorem 26, S. 163.